现代数学译丛 19

随机微分方程

导论与应用

(第6版)

〔挪〕Bernt Øksendal 著
刘金山 吴付科 译

科学出版社



随机微分方程

导论与应用

现代数学译丛 19

随机微分方程

导论与应用

(第 6 版)

〔挪〕 Bernt Øksendal 著

科学出版社

北京

图字：01-2012-1460 号

内 容 简 介

本书的主要内容包括 Itô 积分和鞅表示定理、随机微分方程、滤波问题、扩散理论的基本性质和其他的论题、在边界值问题中的应用、在最优停时方面的应用、在随机控制领域中的应用及数理金融中的应用.

本书可供理工和金融管理类的高年级本科生及研究生阅读，也可作为数学系高年级本科生及研究生的教材或科研工作者的参考用书.

Translation from the English language edition:
Stochastic Differential Equations by Bernt Øksendal

图书在版编目(CIP)数据

随机微分方程导论与应用/(挪)Bernt Øksendal(厄克森达尔)著；刘金山，吴付科译. —6 版. —北京：科学出版社，2012
(现代数学译丛；19)
ISBN 978-7-03-033763-4
Ⅰ. 随… Ⅱ. ①B… ②刘… ③吴… Ⅲ. 随机微分方程 Ⅳ. O211.63
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012) 第 039163 号

责任编辑：赵彦超 / 责任校对：朱光兰
责任印制：钱玉芬 / 封面设计：王 浩

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 4 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2012 年 4 月第一次印刷 印张：21 1/2
字数：398 000

定价：68.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

第 6 版第 4 次印刷前言

在这一次校正中, 基本上所有的修改都要归功于 Ralf Forster. 作者十分感激他对本书所作的有益的改进. 同时也很感谢 Jerome Stein, 他与作者进行了令人兴奋的讨论, 从而在本书中加入了新的习题 8.18.

作者也要感谢 Dina Haraldsson, 她用专业的打字技术帮助了作者.

Bernt Øksendal

2007 年 2 月于 Blindern

第 6 版第 3 次印刷前言

在这个校正版中, 对某些打印错误进行了校正, 另外进行了某些改进 (在本书后面), 提供了 (部分或全部) 解答的练习都标注了一个星号. 作者希望感谢下列人员的有益的评论, 他们是 (按字母排序): Holger Van Bargen, Catriona Byrne, Mark Davis, Per-Ivar Faust, Samson Jinya, Paul Kettler, Alex Krouglov, Mauro Mariani, John O'Hara, Agnes Sulem, Bjørn Thunestvedt 和 Vegard Trondsen.

作者对 Dina Haraldsson 仔细和熟练的打字特别表示感谢.

Bernt Øksendal

2005 年 8 月于 Blindern

第 6 版前言

这一版包括了某些习题的详细解答. 许多读者要求这样, 因为它使本书更适合于自学, 同时增加了一些新的练习 (没有解答). 为了方便使用这一版和先前的版本, 把它们都放在每章的最后面.

有几个错误进行了修改, 并对几个公式作了改进. 这些得益于下列人员的有益的评论. 他们是 (按字母排序): Jon Bohlin, Mark Davis, Helge Holden, Patrick Jaillet, Chen Jing, Keigo Osawa, Bjørn Thunestvedt, Jan Ubøe 和 Yngve Williassen. 作者感谢他们帮助改进了本书.

作者也再次感谢 Dina Haraldsson, 她又一次完成了打印工作并娴熟地画了图.

Bernt Øksendal

2002 年 9 月于 Blindern

第 5 版校正印刷前言

这个校正版主要对第 12 章进行了校正和改进. 作者从很多有益的评论中受益颇多, 这些议论者是 (按字母顺序): Fredrik Dahl, Simone Deparis, Ulrich Haussmann, Yaozhong Hu, Marianne Huebner, Carl Peter Kirkebø, Nikolay Kolev, Takashi Kumagai, Shlomo Levental, Geir Magnussen, Anders Øksendal, Jurgen Potthoff, Colin Rowat, Stig Sandnes, Lones Smith, Setsuo Tamiguchi 和 Bjørn Thunestvedt.

作者感谢他们帮助作者使本书变得更好, 同时也要感谢 Dina Haraldsson 高效的打字技术.

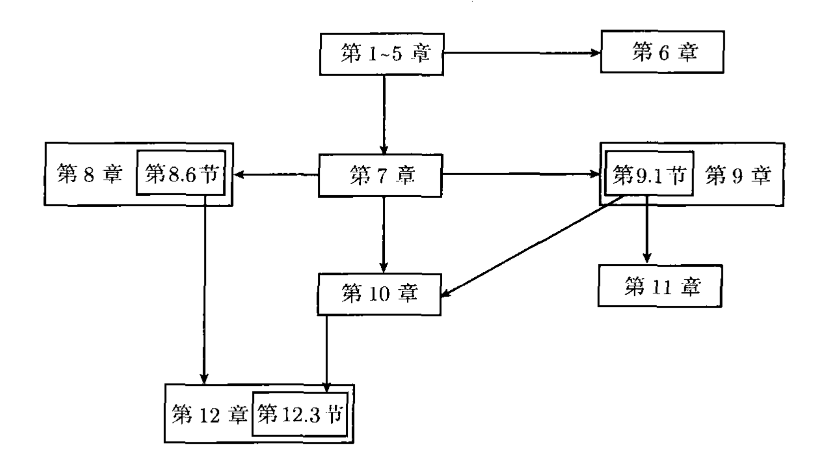
Bernt Øksendal

2000 年 5 月于 Blindern

第 5 版前言

第 5 版的主要特色是增加了一章新的内容, 即第 12 章: 在数理金融中的应用. 由于在最近 10~20 年中, 这个领域得到了飞速的发展, 作者发现把它看成是随机分析的另一个主要的应用是十分自然的事. 而且, 在这个领域, 理论成果和应用之间紧密的结合是引人注目的. 比如, 今天几乎没有企业进行期权交易而不利用 Black & Scholes 公式.

与第 4 版相比, 前 11 章几乎没有什么变化, 但作者仍继续致力于改善和校对误印与错误, 增加了一些新的习题. 而且, 为了方便本书的使用, 每章都分成了几小节. 如果不想 (或没有时间) 阅读所有的章节, 可选择性地进行阅读. 下图表示章节之间的依赖关系. 比如, 新的第 12 章的前两节需要用到第 1~5 章、第 7 章和第 8.6 节. 第 12.3 节, 特别是关于美式期权的部分, 需要附加必要的背景知识, 因此第 10 章, 从而第 9.1 节是必须用到的.



在这一版中, 作者从许多有益的建议中受益匪浅, 建议者包括 (依字母顺序): Kunt Aase, Luis Alvarez, Peter Christensen, Kian Esteghamat, NilsChristian Framstad, Helge Holden, Christian Irgens, Saul Jacka, Naoto Kunitomo 和他的小组, Sure Mataramvura, Trond Myhre, Anders Øksendal, Nils Øvrelid, Walter Schachermayer, Bjarne Schielderop, Atle Seierstad, Jan Ubøe, Gjermund Vage 和 DanZes. 作者感谢他们对本书的改进所作出的贡献.

Dina Haraldsson 再一次证明了她打印手稿的优秀技能 —— 在复杂的 LATEX

第 4 版前言

在这一版中, 作者增加了一些内容, 它们在应用时特别有用, 即鞅表示定理 (第 4 章), 对应于最优停时问题的变分不等式 (第 10 章) 和带终端条件的随机控制 (第 11 章), 增加了某些习题的提示和解法. 而且, 对 Girsanov 定理的证明和讨论作了改进以使它在经济学中更便于应用. 为了使该书更好和更有用, 对正文也作了修正.

在这个工作中, 作者从下列人员的有益的评论中受益良多: Knut Aase, Sigmund Berntsen, Mark H.A. DAvis, Helge Holden, Yaoahong Hu, Tom Lindstrøm Trgve Nilsen, Paulo Ruffino, Isaac Saias, Clint Scovel, Jan Ubøe, Suleyman Ustunel, Qinghua Zhang, Tusheng Zhang 和 Vitor Daniel Zurkowski. 作者对他们给予的帮助表示十分的感谢.

作者特别感谢 Hakon Nyhus, 他仔细地阅读了大部分手稿, 提出了许多改良之处和许多有用的建议. 最后, Tove Møller 和 Dina Haraldsson 打印手稿的熟练程度令人印象深刻, 作者在此对他们表示感谢.

Bernt Øksendal

1995 年 6 月于 Oslo

第 3 版前言

第 3 版主要的新特色是在第 2~11 章中都包括了很多的习题. 这些习题有助于读者对正文更好的理解. 某些习题是很常规的, 其目的是为了说明正文中的结论. 但有的练习较难, 更具有挑战性, 有些是正文中理论的延伸.

作者从 Mark H.A. Davis, Håkon, Gjessing, Torgny Lindvall 和 Hakon Nyhus 的有价值的建议和评论中获益良多, 在此对他们表达最衷心的感谢.

一个十分引人注目的非数学的改进是该书用 TEX 打印. Tove Lieberg 做了很多的打印工作 (如通常一样), 作者对她的努力和无限的耐心表示十分的感激.

Bernt Øksendal

1991 年 6 月于 Oslo

第 2 版前言

在第 2 版中作者把关于扩散过程的那一章分成了两章, 即新的第 7 章和第 8 章. 第 7 章仅处理扩散的一些基本的性质, 在最后三章的应用中, 它们是必须要用到的. 读者们迫切地想从第 7 章直接跳到第 9~11 章, 让它们尽可能快地得到应用.

在第 8 章, 对扩散的其他重要性质进行了讨论, 尽管在本书的剩余部分中它们并非是必要的, 但那些性质是当今随机分析理论的中心点, 也是其他许多应用的关键点.

希望这种改变能使本书对不同目的的人更具有灵活性. 作者也致力于对某些方面进行改进, 对所知道的讹误和打印错误进行了校正, 希望没有带来新的错误. 作者感谢收到的关于该书的反馈. 对于 Henrik Martens 的有益的评论, 作者在此特别表示感谢.

Tove Lieberg 准确快速的打印技术给作者留下了深刻的印象. 作者感谢她的帮助和耐心, 同时也感谢 Dina Haraldson 和 Tone Rasmussen 在打印方面给予的帮助.

Bernt Øksendal

1989 年 8 月于 Oslo

第 1 版前言

书中的注解基于作者在 1982 年春季给 Edinburgh(爱丁堡) 大学的研究生讲解的随机微分方程课程. 该课程不需要多少预备知识, 只需有一点测度论的背景即可.

有几点理由说明为什么要学习随机微分方程. 随机微分方程在数学领域之外有着广泛的应用, 与其他数学学科有着许多联系, 另外, 作为一个迷人的研究领域, 该学科本身存在许多有趣的悬而未决的问题, 具有快速发展的生命力.

不幸的是, 绝大部分关于随机微分方程的文献似乎都更注重内容的严谨性和完整性, 而缺少许多非专家的方法. 本书中的附注试图用非专家的观点来解读该学科. 如果对一门学科一无所知, 你首先最想知道的是什么? 你的回答可能是:

(1) 在什么情形下产生该学科?

(2) 它的本质特征是什么?

(3) 它有什么应用及与其他领域有什么联系?

作者并不注重更一般情形的证明, 而宁愿对特殊情形作更容易的证明, 因为它更能体现论证的基本思想. 本书引入了某些基本结果而不证明, 从而有更多的篇幅来说明它们的基本应用. 附注反映了这个观点, 这种方法能使我们更快更容易地进入理论的精彩部分. 希望那些附注可以填补现存文献中的空白. 这门课程是很吸引人的, 如果它能唤起你更大的兴趣, 读者会有大量优秀的文献可供选择利用, 那些文献都列在书末.

在导言中叙述了 6 个问题, 随机微分方程扮演着本质的角色. 在第 2 章介绍上述问题中的数学模型所需的一些基本的数学概念. 由此引出第 3 章中的 Itô 积分. 在第 4 章发展到随机分析 (Itô 公式), 第 5 章则用它解某些随机微分方程, 包括在导言中介绍的前面两个问题, 在第 6 章利用随机分析介绍线性滤波问题的解 (问题 3 作为一个例子). 问题 4 是 Dirichlet 问题, 尽管它是纯确定性的. 在第 7 章和第 8 章介绍如何引入辅助的 Itô 扩散 (即随机微分方程的解) 来得到一个简单的、直观的、有用的随机解, 它是随机位势论的基石. 问题 5 是一个最优停时问题. 第 9 章介绍用 Itô 扩散来表示在 t 时刻对策的状态, 解相应的最优停时问题, 它的解包含了位势论中的概念. 比如, 在第 8 章 Dirichlet 问题的解的广义化调和扩张. 问题 6 是 Ramsey 于 1928 年提出的经典的控制问题的随机版本. 第 10 章依据随机微分方程求解一般的随机控制问题, 应用第 7 章和第 8 章的结果证明该问题可归纳成解 (确定性的)Hamilton-Jacobi-Bellman 方程. 作为一个例子, 求解了关于最优证券组合选择问题.

在 1982 年于 Edinburgh 大学第一次开了这门课程之后, 在 Agder 学院 Kristiansand(克里斯蒂安桑) 和 Oslo(奥斯陆) 大学讲学时对书稿进行了修改和扩充. 每次大约有一半的听众来自于应用领域, 其余的来自于所谓的"纯"数学领域. 这种丰富的组合产生了一个广泛的、多样的、宝贵的评论, 对此作者十分感谢. 特别感谢 K.K. Aase, L. Csink 和 A.M. Davie, 他们与作者进行了很多次有益的讨论.

作者感谢英国科学与工程研究协会和挪威的 Norges Almenvitenskapelige Forskningsrad (NAVF) 的资助. 特别感激 Ingrid Skram, Agder 学院和 Inger Prestbakken, Oslo 大学, 在那两年中, 我对手稿进行过无数次的改动, 而他们一如既往地给予支持.

注意, 第 1 版的第 8~10 章变成了第 2 版的第 9~11 章.

Bernt Øksendal
1985 年 6 月于 Oslo

目　　录

第1章　导　　言

为了使读者确信随机微分方程是一门重要的学科, 先提出下面的一些问题.

1.1　典型微分方程的随机模拟

如果认为微分方程的某些系数是随机的, 则可得到更为现实的数学模型.

问题 1　考虑简单的人口增长模型

$$\frac{dN}{dt} = a(t)N(t), \quad N(0) = N_0(\text{常数}), \tag{1.1.1}$$

这里 $N(t)$ 是 t 时刻的人口数量, $a(t)$ 是 t 时刻的相对人口增长率. 在某些随机的环境影响下, $a(t)$ 可能并不是完全知道的. 故此可设

$$a(t) = r(t) + \text{“噪声”},$$

这里我们并不知道噪声项的具体表现, 但知道它的概率分布, 而函数 $r(t)$ 假定为非随机的. 在这个情形, 如何求解方程 (1.1.1)?

问题 2　在一个电路中, 某一固定点在 t 时刻的电荷 $Q(t)$ 满足下面的微分方程:

$$LQ''(t) + RQ'(t) + \frac{1}{C}Q(t) = F(t), \quad Q(0) = Q_0, \quad Q'(0) = I_0, \tag{1.1.2}$$

这里 L 是感应系数, R 是电阻, C 是电容, $F(t)$ 是 t 时刻的电势. 同理, 在某些情形下, 某些系数, 比如说 $F(t)$ 并不是确定性的, 而有下面的形式:

$$F(t) = G(t) + \text{“噪声”}, \tag{1.1.3}$$

这时如何解 (1.1.2)?

更一般地, 在微分方程的系数随机化后得到的方程称为随机微分方程. 以后有更精确的定义. 显然, 一个随机微分方程的任何解都一定包含某种随机性, 因此, 我们仅希望能对解的概率分布做点事情.

1.2　滤 波 问 题

问题 3　为了更深入了解关于问题 2 的解的知识, 假设在 $s \leqslant t$ 时, 通过观察得到 $Q(s)$ 的监测值 $Z(s)$, 然而, 由于测量的不精确性, 不能真正地测量到 $Q(s)$, 只

能得到它的一个扰动:

$$Z(s) = Q(s) + \text{“噪声”}, \tag{1.2.1}$$

因此, 这时候有两个噪声来源, 而第二个来源于测量的误差.

滤波问题是: 当 $s \leqslant t$, 在 (1.2.1) 中观察到 $Z(s)$ 时, 满足方程 (1.1.2) 的 $Q(t)$ 的最佳估计是什么? 直观地, 是要用最优的方法把观察值中的“噪声”项“滤”掉.

Kalman 在 1960 年及 Kalman 与 Bucy 在 1961 年证明了著名的 Kalman-Bucy 滤波器. 基本上, 在观察到一系列“噪声”的前提下, 该滤波器给出了满足带噪声的线性微分方程的系统状态的评估方法. 该发现很快就被应用到了航空工业上, 现在得到了更广泛的应用, 因此 Kalman-Bucy 滤波器提供了一个最新的数学发现被证明是有用的例子, 而不仅是“潜在”有用. 它也是“应用数学是坏数学”及“唯一真正有用的数学是基础数学”的一个鲜明的反例. Kalman-Bucy 滤波器与整个随机微分方程是先进的、有趣的、一流的数学课程.

1.3 确定性边界值问题的随机方法

问题 4 最具轰动性的例子是 Dirichlet 问题的随机解: 给定 $\mathbf{R}^n$ 中的一个区域 U 及其边界 ∂U 和边界 ∂U 上的连续函数 f. 求一个在 U 的闭包 $\bar{U}$ 上连续的函数 $\tilde{f}$ 满足:

(i) $\tilde{f} = f$, 在边界 ∂U 上成立.

(ii) $\tilde{f}$ 在 U 上是调和的, 即在 U 上有

$$\Delta \tilde{f} := \sum \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial x_i^2} = 0.$$

1944 年, Kakutani 证明了它的解能用布朗运动 (在第 2 章给出构造) 表示: $\tilde{f}(x)$ 是初始点为 $x \in U$ 的布朗运动首次逸出区域 U 的边界点的函数值 f 的期望值.

好像冰山的尖端开始融化了一样, 对大部分类型的半椭圆型二阶偏微分方程, 相应的 Dirichlet 边值问题能通过相应的随机微分方程的解来解决.

1.4 最优停时

问题 5 假定某人计划卖掉一个资产或资源 (如房屋、股票、石油等). 在开放的市场上, 他的资产在 t 时刻的价格 X_t 的变化满足问题 1 的随机微分方程:

$$\frac{dX_t}{dt} = rX_t + \alpha X_t \cdot \text{“噪声”},$$

这里 r, α 为已知的常数, 折现率为已知常数 ρ, 那么在什么时候卖掉该资产为最好?

假设知道现在时刻 t 以前的资产的过去表现 X_s, 但是由于系统中的噪声, 当然无法确信选择卖的时间是否为最优的. 因此要找一个停时策略, 在长期运行中它应该是最好的结果, 即把通胀考虑进去以后的最大化期望利润. 这是一个最优停时问题, 它的解能由相应的边界值问题 4 的解来表达. 非边界是未知的 (自由边界), 此时就有另外两个边界条件, 它也可由一系列变分不等式来表达出来.

1.5 随机控制

问题 6(最优证券组合问题) 假设某人有两个投资可能性:

(i) 无风险投资 (如债券). 在 t 时刻每单位的价格 $X_0(t)$ 按指数增长:

$$\frac{dX_0}{dt} = \rho X_0, \tag{1.5.1}$$

这里 $\rho > 0$ 为常数.

(ii) 有风险的投资 (如股票). 在 t 时刻每单位的价格 $X_1(t)$ 满足前面讨论的问题 1 类型的随机微分方程:

$$\frac{dX_1}{dt} = (\mu + \sigma \cdot \text{“噪声”})X_1, \tag{1.5.2}$$

这里 $\mu > \rho, \sigma \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, μ 与 σ 为常数.

在每个时刻 t, 该投资者选择他的财富 V_t 中多大的比例 u_t 用于风险投资, 从而 $(1 - u_t)V_t$ 用于无风险投资. 给定效用函数 U 和终端时刻 T, 该投资问题是找到一个最优证券组合 $u_t \in [0, 1]$, 即找到投资分布 u_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, 使终端时刻的财富 $V_T^{(u)}$ 的期望效用为最大:

$$\max_{0\leqslant u_t\leqslant 1} \left\{E\left[U(V_T^{(u)})\right]\right\}. \tag{1.5.3}$$

1.6 数理金融学

问题 7(期权定价) 假定在 $t = 0$ 时, 问题 6 中的个体投资者持有一个权力 (但非义务): 在将来的某个时刻 $t = T$, 有权力以特殊的价格 K 购买一单位风险资产. 该权力被称为一个欧式看涨期权. 该投资者愿意花多少钱去购买这个期权? Fischer Black 与 Myron Scholes (1973) 利用随机分析和均衡理论计算了该期权价格的理论值, 即现在著名的 Black-Scholes 期权定价公式, 从而解决了该问题. 该理论值与已在自由市场中的均衡价格高度统一, 因此它代表了数学模型在金融中的伟大胜利. 在期权的交易和其他金融衍生证券中, 它成为必不可少的工具. 1997 年, 由于期权定价公式及其相关的工作, Myron Scholes 和 Robert Morton 被授予了诺贝尔经济学奖 (Fischer Black 死于 1995 年).

在介绍了必要的数学理论之后, 后面的几章中再来探讨这些问题. 在第 5 章中解决问题 1 与问题 2. 滤波问题 (包括问题 3) 将在第 6 章中处理. 广义化的 Dirichlet 问题 (问题 4) 在第 9 章中得到解决. 问题 5 在第 10 章中得到解决, 而随机控制问题 (问题 6) 在第 11 章中讨论. 最后在第 12 章中, 讨论它们在数理金融中的应用.

第2章　数学基础

2.1　概率空间, 随机变量和随机过程

为了说明将要解决的问题, 有必要介绍问题中的数学模型及相关数量的数学概念. 简而言之, 下面是需要进行数学解释的一些概念的一个列表:

(1) 随机数;

(2) 独立性;

(3) 一系列随机数的参数化 (离数或连续);

(4) 在滤波问题 (问题 3) 中“最佳”估计是什么意思?

(5) “依赖”于某些观察值的估计是什么意思 (问题 3)?

(6) “噪声”的数学解释是什么?

(7) 随机微分方程的数学解释是什么?

本章简单地讨论一下 (1)~(3), 下一章考虑 (6) 而由此导出 Itô 随机积分概念 (7), 在第 6 章将考虑 (4) 和 (5).

随机数的数学模型是随机变量, 在给出定义之前, 回顾一般概率论的某些概念, 如想知道更多的数学知识, 读者可参考文献 (Williams, 1991).

定义 2.1.1　给定集合 Ω, 那么 Ω 上的 σ 代数 $\mathcal{F}$ 是由 Ω 的某些子集构成的集族且具有下列性质:

(1) $\varnothing \in \mathcal{F}$;

(2) $F \in \mathcal{F} \Rightarrow F^C \in \mathcal{F}$, 这里 $F^C = \Omega \setminus F$ 是 F 在 Ω 中的余集;

(3) $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F} \Rightarrow A := \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

称 $(\Omega, \mathcal{F})$ 为一个可测空间, 一个可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的概率测度 P 是一个函数 $P: \mathcal{F} \to [0,1]$, 使得

(a) $P(\varnothing) = 0,\ P(\Omega) = 1$;

(b) 如果 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ 且 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是互不相交 (即 $A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$), 那么

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

称 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一个概率空间. 如果 $\mathcal{F}$ 包括了 Ω 中 P 外测度为零的所有子集, 即

$$P^*(G) := \inf\{P(F) : F \in \mathcal{F}, G \subset F\} = 0,$$

则称 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为完备的概率空间. 所有的概率空间都可通过把所有的外测度为零的集加入 $\mathcal{F}$ 中且相应地延拓 P 的定义域, 即可得到完备化的概率空间. 从现在起, 假定所有的概率空间都是完备的.

对 Ω 中的某一子集 F, 如果 F 属于 $\mathcal{F}$, 则称 F 为 $\mathcal{F}$ 可测集. 在概率上称之为事件. 利用下面的解释:

$$P(F) = \text{“事件 } F \text{ 发生的概率”},$$

特别, 如果 $P(F) = 1$, 则说“F 以概率 1 发生”或者“几乎必然 (a.s.)”.

对给定的 Ω 的一个集族 $\mathcal{U}$, 存在一个包含 $\mathcal{U}$ 的最小的 σ 代数 $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$, 即

$$\mathcal{H}_{\mathcal{U}} = \cap\{\mathcal{H} : \mathcal{H} \text{ 为 } \Omega \text{ 上的 } \sigma \text{ 代数}, \mathcal{U} \subset \mathcal{H}\}$$

(见练习 2.3), 称 $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ 是由 $\mathcal{U}$ 生成的 σ 代数.

例如, $\mathcal{U}$ 是拓扑空间 Ω 的所有开子集构成的集合 (如 $\Omega = \mathbf{R}^n$), 那么 $\mathcal{B} = \mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ 称为 Ω 上的 Borel σ 代数. 对任意元素 $B \in \mathcal{B}$ 称为 Borel 可测集. $\mathcal{B}$ 包含所有的开子集、所有的闭子集、所有的可数个闭子集的并集, 及所有的可数个这种并集的交集等等.

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是给定的概率空间, 那么函数 $Y : \Omega \to \mathbf{R}^n$ 称为 $\mathcal{F}$ 可测的, 如果

$$Y^{-1}(U) := \{\omega \in \Omega; Y(\omega) \in U\} \in \mathcal{F}$$

对所有的开集 $U \in \mathbf{R}^n$(或等价地, 对所有的 Borel 集 $U \in \mathbf{R}^n$) 成立.

若 $X : \Omega \to \mathbf{R}^n$ 是任一函数, 那么由 X 生成的 σ 代数 $\mathcal{H}_X$ 是 Ω 上的包含所有形如 $X^{-1}(U), U \in \mathbf{R}^n$ 为开集的最小 σ 代数. 不难证明

$$\mathcal{H}_X = \{X^{-1}(B); B \in \mathcal{B}\},$$

这里 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的 Borel σ 代数. 显然 X 是 $\mathcal{H}_X$ 可测的, 而 $\mathcal{H}_X$ 是具有上述性质的最小的 σ 代数.

下面的结论是有用的, 它是 Doob-Dynkin 引理 (Rao, 1984) 的一个特殊情形.

引理 2.1.2　如果 $X, Y : \Omega \to \mathbf{R}^n$ 是两个给定的函数, Y 为 $\mathcal{H}_X$ 可测的充要条件是存在一个 Borel 可测函数 $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 使得

$$Y = g(X).$$

下面, 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个给定的完备概率空间, 一个随机变量 X 是一个 $\mathcal{F}$ 可测函数 $X : \Omega \to \mathbf{R}^n$. 每个随机变量诱导了一个 $\mathbf{R}^n$ 上的概率测度 μ_X, 定义为

$$\mu_X(B) = P(X^{-1}(B)),$$

μ_X 称为 X 的分布.

如果 $\int_\Omega |X(\omega)|dP(\omega) < \infty$. 那么

$$E[X] := \int_\Omega X(\omega)dP(\omega) = \int_{\mathbf{R}^n} x d\mu_X(x)$$

称为 X 的期望. 更一般地, 如果 $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 是 Borel 可测的, 且 $\int_\Omega |f(X(\omega))|dP(\omega) < \infty$, 那么有

$$E[f(X)] := \int_\Omega f(X(\omega))dP(\omega) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)d\mu_X(x).$$

L^p 空间

如果 $X: \Omega \to \mathbf{R}^n$ 是一个随机变量, $p \in [1, \infty)$ 是一个常数, 定义 X 上的 L^p 范数 $\|X\|_p$:

$$\|X\|_p = \|X\|_{L^p(P)} = \left(\int_\Omega |X(\omega)|^p dP(\omega)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

如果 $p = \infty$, 定义

$$\|X\|_\infty = \|X\|_{L^\infty(P)} = \inf\{N \in \mathbf{R}; |X(\omega)| \leqslant N \text{ a.s.}\},$$

相应的 L^p 空间定义为

$$L^p(P) = L^p(\Omega) = \{X: \Omega \to \mathbf{R}^n; \|X\|_p < \infty\},$$

在该范数定义下, L^p 空间是 Banach 空间即完备的赋范空间 (见习题 2.19). 如果 $p = 2$, 空间 $L^2(P)$ 是一个 Hilbert 空间, 即完备的内积空间, 其中内积

$$(X, Y)_{L^2(P)} := E[X \cdot Y], \quad X,\ Y \in L^2(P).$$

独立性的数学定义如下:

定义 2.1.3 两个子集 $A, B \in \mathcal{F}$ 称为独立的, 如果

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

集族 $\mathcal{A} = \{\mathcal{H}_i; i \in I\}$, 其中每个 $\mathcal{H}_i$ 是可测集族, 称是独立的, 如果

$$P(H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_k}) = P(H_{i_1}) \cdots P(H_{i_k}),$$

对 $\forall\, H_{i_1} \in \mathcal{H}_{i_1}, \cdots, H_{i_k} \in \mathcal{H}_{i_k}$ 成立, $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 互不相同.

随机变量族 $X_i, i \in I$ 是独立的, 如果由它们生成的 σ 代数 $\mathcal{H}_{X_i}$ 构成的集族是独立的.

如果两个随机变量 $X, Y : \omega \to \mathbf{R}$ 是独立的, 假设 $E[|X|] < \infty$ 及 $E[|Y|] < \infty$, 则

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

(见习题 2.5).

定义 2.1.4　随机过程是带参数的一族随机变量: $\{X_t\}_{t \in T}$ 定义于概率空间 $(\Omega, \mathcal{H}, P)$ 上, 取值于 $\mathbf{R}^n$ 中.

参数空间 T 通常是射线 $[0, \infty)$(在本书中). 但也可以是区间 $[a, b]$, 或非负整数, 甚至可以是 $\mathbf{R}^n$ 中的子集, $n \geqslant 1$. 注意对每个固定的 $t \in T$, 有随机变量

$$\omega \to X_t(\omega); \quad \omega \in \Omega.$$

另一方面, 固定 $\omega \in \Omega$, 可以考虑函数

$$t \to X_t(\omega); \quad t \in T,$$

称它为 X_t 的路径.

一般可直观地把 t 当作"时间", 而每个 ω 可认为单个"质子"或"实验". $X_t(\omega)$ 表示在时刻 t 质子 (实验)ω 的位置 (或结果). 有时用 $X(t, \omega)$ 代替 $X_t(\omega)$, 因此也可把过程看作一个从 $T \times \Omega$ 到 $\mathbf{R}^n$ 中的二元函数: $(t, \omega) \to X(t, \omega)$. 这是随机分析中很自然的观点, 因为这里关键之处是 $X(t, \omega)$ 关于 (t, ω) 是二元可测的.

最后注意到, 可以认为, 对每个 ω, 函数 $t \to X_t(\omega)$ 是从 T 到 $\mathbf{R}^n$ 的函数, 因此可认为 Ω 是空间 $\tilde{\Omega} = (\mathbf{R}^n)^T$(即从 T 到 $\mathbf{R}^n$ 的所有的函数全体集合) 的子集. 从而 σ 代数 $\mathcal{F}$ 将包含 σ 代数 $\mathcal{B}$, 而 $\mathcal{B}$ 是由具有下列形式的集合生成的:

$$\{\omega; \omega(t_1) \in F_1, \cdots, \omega(t_k) \in F_k\}, \quad F_i \subset \mathbf{R}^n \text{ 为 Borel 集}$$

($\mathcal{B}$ 可看作 $\tilde{\Omega}$ 上的 Borel σ 代数, 如果 $T = [0, \infty)$, 而 $\tilde{\Omega}$ 是给定的积拓扑). 因此, 也可以认为随机过程是可测空间 $((\mathbf{R}^n)^T, \mathcal{B})$ 上的一个概率测度 P.

过程 $X = \{X_t\}_{t \in T}$ 的 (有限维) 分布是定义在 $\mathbf{R}^{nk}, k = 1, 2, \cdots$ 上的测度 $\mu_{t_1, \cdots, t_k}$, 其中

$$\mu_{t_1, \cdots, t_k}(F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_k) = P[X_{t_1} \in F_1, \cdots, X_{t_k} \in F_k]; \quad t_i \in T,$$

这里 $F_1, \cdots, F_k$ 定义为 $\mathbf{R}^n$ 中的 Borel 集.

所有有限维分布族决定了过程 X 的很多 (但不是全部) 重要性质. 相反地, 给定 $\mathbf{R}^{nk}$ 上的一族概率测度 $\{\nu_{t_1, \cdots, t_k}; k \in \mathbf{N}, t_i \in T\}$, 是否能构造一个随机过程 $Y = \{Y_t\}_{t \in T}$ 使得 $\nu_{t_1, \cdots, t_k}$ 作为它的有限维分布, 这一点是很重要的. Kolmogorov 的一个著名定理证明了如果 $\{\nu_{t_1, \cdots, t_k}\}$ 满足两个自然的一致性条件 (Lamperti, 1977), 则满足条件的随机过程可构造出来.

定理 2.1.5(Kolmogorov 存在定理) 对任意的 $t_1, \cdots, t_k \in T, k \in \mathbf{N}$, 设 $\nu_{t_1,\cdots,t_k}$ 为 $\mathbf{R}^{nk}$ 上的概率测度, 满足

(K1) $\nu_{t_{\sigma(1)},\cdots,t_{\sigma(k)}}(F_1 \times \cdots \times F_k) = \nu_{t_1,\cdots,t_k}(F_{\sigma^{-1}(1)} \times \cdots \times F_{\sigma^{-1}(k)})$, 其中 σ 为 $\{1, 2, \cdots, k\}$ 的任意一个排列.

(K2) $\nu_{t_1,\cdots,t_k}(F_1 \times \cdots \times F_k) = \nu_{t_1,\cdots,t_k,t_{k+1},\cdots,t_{k+m}}(F_1 \times \cdots \times F_k \times \mathbf{R}^n \times \cdots \times \mathbf{R}^n)$ 对 $\forall\, m \in \mathbf{N}$, 此处右边总共有 $k+m$ 个因素.

则存在一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 和 Ω 上的随机过程 $\{X_t\}$, $X_t : \Omega \to \mathbf{R}^n$. 对任意的 $t_i \in T, k \in \mathbf{N}$ 及任意的 Borel 集 F_i 满足:

$$\nu_{t_1,\cdots,t_k}(F_1 \times \cdots \times F_k) = P[X_{t_1} \in F_1, \cdots, X_{t_k} \in F_k].$$

2.2 一个重要例子: 布朗运动

1828 年, 苏格兰植物学家布朗观察到谷物类花粉悬浮在液体中表现出不规则的运动, 该运动后来用它与液体分子的随机碰撞来解释. 数学上描述该运动时自然地利用随机过程 $B_t(\omega)$ 的概念, 它解释为在时刻 t 谷物类花粉 ω 的位置. 稍作推广考虑一个 n 维的类似情形.

为了构造 $\{B_t\}_{t \geqslant 0}$, 由 Kolmogorov 存在定理, 只需指定一族概率测度 $\{\nu_{t_1,\cdots,t_k}\}$ 满足条件 (K1), (K2) 且这些测度与观察到的花粉的表现相一致: 固定 $x \in \mathbf{R}^n$, 定义

$$p(t, x, y) = (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right), \quad y \in \mathbf{R}^n, t > 0.$$

如果 $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_k$, 在 $\mathbf{R}^{nk}$ 上定义一个测度 $\nu_{t_1,\cdots,t_k}$ 使得

$$\begin{aligned} &\nu_{t_1,\cdots,t_k}(F_1 \times \cdots \times F_k) \\ =& \int_{F_1 \times \cdots \times F_k} p(t_1, x, x_1) p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \cdots p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k) dx_1 \cdots dx_k, \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

此处 $dy = dy_1 \cdots dy_k$ 为 Lebesgue 测度, $p(0, x, y)dy = \delta_x(y)$ 是在 x 处的单位质点.

利用 (K1), 把它延拓到所有 t_i 的有限序列. 由于对 $\forall t \geqslant 0$, $\int_{\mathbf{R}^n} p(t, x, y) dy = 1$, 故 (K2) 满足, 由 Kolmogorow 定理, 存在一个概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P^x)$ 和一个 Ω 上的随机过程 $\{B_t\}_{t \geqslant 0}$, 使得 B_t 的有限维分布为 (2.2.1), 即

$$\begin{aligned} &P^x(B_{t_1} \in F_1, \cdots, B_{t_k} \in F_K) \\ =& \int_{F_1 \times \cdots \times F_k} p(t_1, x, x_1) \cdots p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k) dx_1 \cdots dx_k. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

定义 2.2.1　上述过程称为初值为 x 的布朗运动 (的修正)(注意 $P^x(B_0 = x) = 1$).

这样定义的布朗运动不是唯一的, 即存在多个四重素 $(B_t, \Omega, \mathcal{F}, P^x)$ 使得 (2.2.2) 满足. 然而, 我们的目的不在此, 不久就会看到, 布朗运动的路径是 (或更准确地说, 能被选择为) 连续的几乎必然地成立. 因此可以认为, 对 (几乎所有的)$\omega \in \Omega, t \to B_t(\omega)$ 是从 $[0, \infty)$ 到 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数. 由此可以采用观点：布朗运动就是空间 $C([0,\infty), \mathbf{R}^n)$ 及其上的某概率测度 P^x(满足 (2.2.1) 和 (2.2.2)). 它称为标准的布朗运动. 另外它具有直观的优点. 由于该空间是完备的可分度量空间, 即 Polish 空间, 有利于对其上的测度做更深入的分析 (Stroock, Varadhan, 1979).

下面叙述布朗运动的基本性质：

(i) B_t 是一个 Gauss 过程, 即对所有的 $0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_k$, 随机变量 $Z = (B_{t_1}, \cdots, B_{t_k}) \in \mathbf{R}^{nk}$ 是服从 (多重) 正态分布, 即存在一个向量 $M \in \mathbf{R}^{nk}$ 和一个半正定矩阵 $C = [c_{jm}] \in \mathbf{R}^{nk \times nk}$($nk$ 阶实值矩阵) 使得

$$E^x\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^{nk} u_j Z_j\right)\right] = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j,m} u_j c_{jm} u_m + i\sum_j u_j M_j\right) \tag{2.2.3}$$

对所有的 $u = (u_1, \cdots, u_{nk}) \in \mathbf{R}^{nk}$ 成立, 这里 $i = \sqrt{-1}$ 是虚数单位, E^x 表示相对于概率测度 P^x 的期望. 而且如果 (2.2.3) 成立, 那么

$$M = E^x[Z] \tag{2.2.4}$$

是 Z 的均值,

$$c_{jm} = E^x[(Z_j - M_j)(Z_m - M_m)] \tag{2.2.5}$$

是 Z 的协方差矩阵 (见附录 A).

为了明白 (2.2.3) 对 $Z = (B_{t_1}, \cdots, B_{t_k})$ 成立. 利用 (2.2.2)(见附录 A) 计算它的左边就可得 (2.2.3), 且有

$$M = E^x[Z] = (x, x, \cdots, x) \in \mathbf{R}^{nk}, \tag{2.2.6}$$

$$C = \begin{pmatrix} t_1 I_n & t_1 I_n & \cdots & t_1 I_n \\ t_1 I_n & t_2 I_n & \cdots & t_2 I_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1 I_n & t_2 I_n & \cdots & t_k I_n \end{pmatrix}, \tag{2.2.7}$$

因此

$$E^x[B_t] = x, \quad \text{对所有 } t \geqslant 0 \tag{2.2.8}$$

及

$$E^x[(B_t - x)^2] = nt, \quad E^x[(B_t - x)(B_s - x)] = n\min(s, t), \tag{2.2.9}$$

而且, 如果 $t \geqslant s$, 则有

$$E^x[(B_t - B_s)^2] = n(t-s), \tag{2.2.10}$$

因为当 $t \geqslant s$ 时, 有

$$\begin{aligned} E^x[(B_t - B_s)^2] &= E^x[(B_t - x)^2 - 2(B_t - x)(B_s - x) + (B_s - x)^2] \\ &= n(t - 2s + s) = n(t-s). \end{aligned}$$

(ii) B_t 具有独立增量, 即对任意的 $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_k$,

$$B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}} \text{ 是独立的.} \tag{2.2.11}$$

为了证明它, 利用不相关的正态随机变量是独立的即可 (见附录 A). 因此只需证当 $t_i < t_j$ 时,

$$E^x[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})] = 0. \tag{2.2.12}$$

而由 C 的形式，有

$$E^x[B_{t_i}B_{t_j} - B_{t_{i-1}}B_{t_j} - B_{t_i}B_{t_{j-1}} + B_{t_{i-1}}B_{t_{j-1}}] = n(t_i - t_{i-1} - t_i + t_{i-1}) = 0,$$

因此 (2.2.12) 成立. 并且可导出：如果 $s > t$, 则有 $B_s - B_t$ 与 $\mathcal{F}_t$ 独立.

(iii) 最后我们要问：是否对几乎所有的 $\omega, t \to B_t(\omega)$ 是连续的, 这样叙述该问题是没有意义的. 因为集合 $H = \{\omega : t \to B_t(\omega)\text{是连续的}\}$ 相对于前面提及的 $(\mathbf{R}^n)^{[0,\infty)}$ 上的 Borel 代数 $\mathcal{B}$ 并不是可测的. 然而稍作修正, 上述问题能得到一个肯定的回答. 为了解释这点, 需要下面的重要概念：

定义 2.2.2　设 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ 是 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机过程, 如果

$$P(\{\omega; X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}) = 1 \text{ 对所有的 } t \text{ 成立,}$$

则说 $\{X_t\}$ 是 $\{Y_t\}$ 的一个修正. 注意, 如果 $\{X_t\}$ 为 $\{Y_t\}$ 的一个修正, 则 $\{X_t\}$ 与 $\{Y_t\}$ 有相同的有限维分布. 如果以随机过程是 $(\mathbf{R}^n)^{[0,\infty)}$ 上的概率论的观点来看, 这两个过程是相同的, 但是它们的路径性质可能不同 (见练习 2.9).

利用著名的 Kolmogorov 定理能回答布朗运动的连续性问题.

定理 2.2.3(Kolmogorov 连续性定理)　假定过程 $X = \{X_t\}_{t \geqslant 0}$ 满足下面的条件：对任意的 $T > 0$, 存在正常数 α, β, D, 使得

$$E[|X_t - X_s|^\alpha] \leqslant D \cdot |t-s|^{1+\beta}; \quad 0 \leqslant s, t \leqslant T, \tag{2.2.13}$$

则存在 X 的一个连续的修正.

它的证明可参考文献 (Strock, Varadhan,1979, 第 51 页). 对于布朗运动 B_t, 不难证明 (见练习 2.8)

$$E^x[|B_t - B_s|^4] = n(n+2)|t-s|^2, \tag{2.2.14}$$

因此布朗运动满足 Kolmogorov 定理的条件 (2.2.13), 其中 $\alpha=4, D=n(n+2), \beta=1$, 于是它有一个连续的修正. 从现在开始假定 B_t 是这样的一个连续修正. 最后, 我们注意

如果 $B_t=(B_t^{(1)},\cdots,B_t^{(n)})$是 n 维布朗运动, 那么 1 维过程 $\{B_t^{(j)}\}_{t\geqslant 0}, 1\leqslant j\leqslant n$ 是相互独立的 1 维布朗运动. (2.2.15)

练　习

2.1. 假设 $X:\Omega\to\mathbf{R}$ 是一个只有可数多个值的函数, 其函数值为 $a_1,a_2,\cdots\in\mathbf{R}$,

a) 证明 X 是一个随机变量的充要条件是

$$X^{-1}(a_k)\in\mathcal{F},\quad k=1,2,\cdots. \tag{2.2.16}$$

b) 假设 (2.2.16) 成立, 证明

$$E[|X|]=\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|P[X=a_k]. \tag{2.2.17}$$

c) 如果 (2.2.16) 成立, 且 $E[|X|]<\infty$, 证明

$$E[X]=\sum_{k=1}^{\infty}a_kP[X=a_k].$$

d) 如果 (2.2.16) 成立, 且 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是有界可测的函数. 证明

$$E[f(X)]=\sum_{k=1}^{\infty}f(a_k)P[X=a_k].$$

2.2. 设 $X:\Omega\to\mathbf{R}$ 是一个随机变量, X 的分布函数 F 定义为

$$F(X)=P[X\leqslant x].$$

a) 证明 F 有下列性质:

(i) $0\leqslant F\leqslant 1, \lim_{x\to-\infty}F(x)=0, \lim_{x\to\infty}F(x)=1$.

(ii) F 是增函数 (即非减的).

(iii) F 是右连续的, 即 $F(x)=\lim_{h\downarrow 0}F(x+h)$.

b) 设 $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是可测的, 使得 $E[|g(X)|]<\infty$, 证明

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dF(x),$$

这里右边的积分是 Lebesgue-Stieltjes 积分.

c) 设 $p(x)\geqslant 0$ 是 $\mathbf{R}$ 上的可测函数, 如果

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(y)dy,\quad \forall x\in\mathbf{R},$$

称 $p(x)$ 是 X 的密度函数. 因此从 (2.2.1) 和 (2.2.2), 对于 1 维布朗运动 B_t, 起点为 $B_0=0$ 的密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right),\quad x\in\mathbf{R}.$$

求 B_t^2 的密度函数.

2.3. 设 $\{\mathcal{H}_i\}_{i\in I}$ 是 Ω 上的一族 σ 代数, 证明

$$\mathcal{H}=\cap\{\mathcal{H}_i;i\in I\}$$

也是一个 σ 代数.

2.4.* a) 设 $X:\Omega\to\mathbf{R}^n$ 是一个随机变量, 存在某个 $p, 0<p<\infty$ 使得

$$E[|X|^p]<\infty.$$

证明 Chebychev 不等式: 对任意的 $\lambda\geqslant 0$,

$$P[|X|\geqslant\lambda]\leqslant\frac{1}{\lambda^p}E[|X|^p].$$

提示: $\int_\Omega |X|^p dP\geqslant\int_A |X|^p dP$, 这里 $A=\{\omega:|X|\geqslant\lambda\}$.

b) 假设存在 $k>0$ 使得

$$M=E[\exp(k|X|)]<\infty.$$

证明对所有的 $\lambda\geqslant 0$, $P[|X|\geqslant\lambda]\leqslant Me^{-k\lambda}$.

2.5. 设 $X,Y:\Omega\to\mathbf{R}$ 是两个独立的随机变量且假定 X 与 Y 是有界的, 证明

$$E[XY]=E[X]E[Y].$$

提示: 设 $|X|\leqslant M, |Y|\leqslant N$, 对 X 及 Y 用简单函数

$$\varphi(\omega)=\sum_{i=1}^{m-1}a_i\mathcal{X}_{F_i}(\omega),\quad \psi(\omega)=\sum_{j=1}^{n-1}b_j\mathcal{X}_{G_j}(\omega)$$

逼近, 这里 $F_i=X^{-1}([a_i,a_{i+1})), G_j=Y^{-1}([b_j,b_{j+1}))$, $-M=a_0<a_1<\cdots<a_m=M, -N=b_0<b_1<\cdots<b_n=N$. 那么

$$E[X]\approx E[\varphi]=\sum_i a_iP(F_i),\quad E[Y]\approx E[\psi]=\sum_j b_jP(G_j),$$

$$E[XY]\approx E[\varphi\psi]=\sum_{i,j}a_ib_jP(F_i\cap G_j)\cdot$$

2.6.* 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 是概率空间. $A_1,A_2,\cdots$ 都是可测集且满足:

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)<\infty,$$

证明 Borel-Cantelli 引理:

$$P\Big(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=m}^{\infty}A_k\Big)=0,$$

即属于无穷多个 A_k 的 ω 的集合的概率为零.

2.7.* a) 设 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 是 Ω 的互不相交的子集, 且

$$\Omega=\bigcup_{i=1}^{n}G_i,$$

证明: 由 $\varnothing$ 和 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 通过并集运算生成的集族 $\mathcal{G}$ 是 Ω 上的 σ 代数.

b) 证明 Ω 上的任何有限 σ 代数 $\mathcal{F}$ 必具有 a) 中某个 $\mathcal{G}$ 的形式.

c) 设 $\mathcal{F}$ 是 Ω 上的一个有限 σ 代数. $X:\Omega\to\mathbf{R}$ 是 $\mathcal{F}$ 可测的, 证明 X 只有有限多个可能的值. 准确地说, 存在互不相交的子集 $F_1,F_2,\cdots,F_m\in\mathcal{F}$ 及实数 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 使得

$$X(\omega)=\sum_{i=1}^{m}c_i\mathcal{X}_{F_i}(\omega).$$

2.8.* 设 B_t 是 $\mathbf{R}$ 上的布朗运动, $B_0=0$, 记 $E=E^0$.

a) 利用 (2.2.3) 证明: 对任意的 $u\in\mathbf{R}$, 有

$$E[e^{iuB_t}]=\exp\left(-\frac{1}{2}u^2t\right).$$

b) 对上式两边的指数函数进行级数展开, 比较两边关于 u 的相同次数项, 推导

$$E[B_t^4]=3t^2$$

与

$$E[B_t^{2k}]=\frac{(2k)!}{2^k k!}t^k,\quad k\in\ \mathbf{N}.$$

c) 如果你由于 b) 中的方法不够严谨而不安, 可证明由 (2.2.2) 推出

$$E[f(B_t)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbf{R}}f(x)e^{-\frac{x^2}{2t}}dx$$

对使得上式右端积分收敛的函数都成立. 然后可令 $f(x)=x^{2k}$. 利用分部积分则可得出 b).

d) 利用 b) 证明 (2.2.14).

2.9.* 为了说明仅有有限维的分布并不能给出一个过程的连续性性质的所有的信息, 考虑下面的例子: 设 $(\Omega,\mathcal{F},P)=([0,\infty),\mathcal{B},\mu)$, 这里 $\mathcal{B}$ 定义为 $[0,\infty)$ 上 Borel σ 代数. μ 是 $[0,\infty)$ 上的概率测度且非单点集测度. 定义

$$X_t(\omega)=\begin{cases}1, & t=\omega;\\ 0, & t\neq\omega\end{cases}$$

和 $Y_t(\omega)=0$ 对任意的 $(t,\omega)\in[0,\infty)\times[0,\infty)$. 证明 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$ 有相同的分布且 X_t 是 Y_t 的一个修正. 但对任意固定的 $\omega,t\to Y_t(\omega)$ 是连续的, 而 $t\to X_t(\omega)$ 是不连续的.

2.10. 一个随机过程 X_t 称为平稳的：对任意 $h>0$，如果 $\{X_t\}$ 与 $\{X_{t+h}\}$ 有相同的分布. 证明布朗运动 B_t 有平稳的增量，即过程 $\{B_{t+h}-B_t\}_{h\geqslant 0}$ 对任意的 t 有相同的分布.

2.11. 证明 (2.2.15).

2.12. 设 B_t 是布朗运动，且固定 $t_0\geqslant 0$，证明

$$\tilde{B}_t = B_{t_0+t} - B_{t_0}, \quad t\geqslant 0$$

是一个布朗运动.

2.13.* 设 B_t 是 2 维布朗运动且设

$$D_\rho = \{x\in \mathbf{R}^2;\ |x|<\rho\}, \quad \rho>0,$$

计算 $P^0[B_t\in D_\rho]$.

2.14.* 设 B_t 是一个 n 维的布朗运动，设 $K\subset \mathbf{R}^n$ 是 n 维 Lebesgue 零测度集，证明 B_t 停在区域 K 内的总的时间长度的期望为零 (这隐含着对于 B_t, Green 测度对于 Lebesgue 测度是绝对连续的，见第 9 章).

2.15.* 设 B_t 是 n 维布朗运动，初始点为 0，$U\in \mathbf{R}^{n\times n}$ 为一个 (常数) 正交矩阵，即 $UU^T=I$，证明

$$\tilde{B}_t := UB_t$$

也是一个布朗运动.

2.16. 布朗换算. 设 B_t 是 1 维布朗运动，$c>0$ 是常数，证明

$$\hat{B}_t := \frac{1}{c}B_{c^2t}$$

也是一个布朗运动.

2.17.* 如果 $X_t(\cdot):\Omega\to\mathbf{R}$ 是一个连续的随机过程，对 $p>0$，X_t 的 p 阶变差过程 $\langle X,X\rangle_t^{(p)}$ 定义为

$$\langle X,X\rangle_t^{(p)}(\omega) = \lim_{\Delta t_k\to 0}\sum_{t_k\leqslant t}|X_{t_{k+1}}(\omega)-X_{t_k}(\omega)|^p$$

(概率意义下的极限)，这里 $0=t_1<t_2<\cdots<t_n=t, \Delta t_k = t_{k+1}-t_k$. 特别，如果 $p=1$，这个过程称为总变差过程. 如果 $p=2$，称为平方变差过程 (见练习 4.7). 对布朗运动 $B_t\in\mathbf{R}$，现在证明平方变差过程如下：

$$\langle B,B\rangle_t(\omega) = \langle B,B\rangle_t^{(2)}(\omega) = t, \quad \text{a.s.}$$

步骤如下：

a) 定义

$$\Delta B_k = B_{t_{k+1}} - B_{t_k}.$$

设

$$Y(t,\omega) = \sum_{t_k<t}(\Delta B_k(\omega))^2,$$

证明

$$E\left[\left(\sum_{t_k<t}(\Delta B_k)^2 - t\right)^2\right] = 2\sum_{t_k<t}(\Delta t_k)^2.$$

由此当 $\Delta t_k \to 0$ 时, 有 $Y(t,\cdot) \to t$ (均方收敛意义下).

b) 利用 a) 证明在 $[0,t]$ 上布朗运动的几乎所有的路径都不存在有界的变差, 即布朗运动的总变差是几乎必然无界的.

2.18.* a) 设 $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ 且 $\mathcal{U}$ 是 Ω 的某些子集的集合, 形式如下:

$$\mathcal{U} = \{\{1,2,3\},\{3,4,5\}\}.$$

求包含 $\mathcal{U}$ 的最小的 σ 代数 (即由 $\mathcal{U}$ 生成的 σ 代数 $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$).

b) 定义 $X:\Omega \to \mathbf{R}$, 其中

$$X(1) = X(2) = 0, \quad X(3) = 10, \quad X(4) = X(5) = 1,$$

问 X 是否关于 $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ 可测?

c) 定义 $Y:\Omega \to \mathbf{R}$, 其中

$$Y(1) = 0, \quad Y(2) = Y(3) = Y(4) = Y(5) = 1,$$

求由 Y 生成的 σ 代数 $\mathcal{H}_Y$.

2.19. 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 是一个概率空间, $p \in [1,\infty]$. 给定函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, 其中 $f_n \in L^p(\mu)$, 如果满足: 当 $n,m \to \infty$ 时, 有

$$\|f_n - f_m\|_p \to 0,$$

则称它为 Cauchy 序列. 若存在 $f \in L^p(\mu)$, 使得在 $L^p(\mu)$ 中 $f_n \to f$, 则称上述序列为收敛序列. 证明每个收敛序列是 Cauchy 序列.

测度论中的基本定理表明在 $L^p(\mu)$ 中它的逆命题也成立, 即每个 Cauchy 序列都是收敛的. 具有上述性质的赋范空间称为完备的赋范空间. 因此空间 $L^p(\mu)$ 是完备的.

2.20. 设 B_t 是一维的布朗运动, $\sigma \in \mathbf{R}$ 是常数, $0 \leqslant s < t$, 利用 (2.2.2) 证明

$$E[\exp(\sigma(B_s - B_t))] = \exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)\right). \tag{2.2.18}$$

第3章 Itô 积分

3.1 Itô 积分的构造

现在对导言中问题 1 的方程中的“噪声”项给出一个合理的数学解释, 原方程为

$$\frac{dN}{dt} = (r(t) + \text{“噪声”})N(t),$$

或更一般地, 方程的形式为

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot \text{“噪声”}, \tag{3.1.1}$$

这里 b 和 σ 是给定的函数. 首先看 1 维的噪声情形. 寻找某个随机过程 W_t 来表示噪声项是合理的, 因此可改写为

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot W_t. \tag{3.1.2}$$

在许多情形, 如在工程中, 一般假定 W_t 至少近似地有下列性质:

(a) $t_1 \neq t_2 \Rightarrow W_{t_1}$ 与 W_{t_2} 是独立的.

(b) $\{W_t\}$ 是平稳的, 即 $\{W_{t_1+t}, \cdots, W_{t_k+t}\}$ 的 (联合) 分布与 t 无关.

(c) $E[W_t] = 0$, 对所有的 t 成立.

然而, 不存在任何“合理”的随机过程满足 (a) 和 (b), 且具有连续的路径 (见练习 3.11). 如果要求 $E[W_t^2] = 1$. 设 $\mathcal{B}$ 是 $[0, \infty)$ 上的 Borel σ 代数, 则函数 $(t, \omega) \to W_t(\omega)$ 甚至关于 σ 代数 $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ 是不可测的 (Kallianpur, 1980, 第 10 页). 但可以把 W_t 看作是一个更广的随机过程, 即所谓的白噪声过程. 更广意味着该过程可构造成是 $[0, \infty)$ 上的适中的分布空间 S' 上的概率测度, 而不像普通过程只看成是一个较小的空间 $\mathbf{R}^{[0,+\infty)}$ 上的概率测度. 参考文献 (Hida, 1980; Adler, 1981; Rozanov, 1982; Hida, Kuo, Potthoff, Streit, 1993; Kuo, 1996; Holden, ksendal, Vbbe, Zhang, 1996).

为避免上述构造, 试图用另一个适当的随机过程去取代 W_t 而重写方程 (3.1.2). 设 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = t$, 考虑 (3.1.2) 的离散形式:

$$X_{k+1} - X_k = b(t_k, X_k)\Delta t_k + \sigma(t_k, X_k)W_k \Delta t_k, \tag{3.1.3}$$

这里

$$X_j = X(t_j), \quad W_k = W_{t_k}, \quad \Delta t_k = t_{k+1} - t_k.$$

放弃 W_k 的记号, 用 $\Delta V_k = V_{t_{k+1}} - V_{t_k}$ 取代 $W_k \Delta t_k$, 这里 $\{V_t\}_{t \geqslant 0}$ 是某个合适的随机过程. 由于 W_t 要满足 (a)~(c), 因此要求 V_t 应具有均值为零的平稳的独立增量. 而具有该性质又具有连续路径的过程只有布朗运动 B_t(Knight, 1981). 因此设 $V_t = B_t$. 从 (3.1.3) 得到

$$X_k = X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} b(t_j, X_j)\Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma(t_j, X_j)\Delta B_j. \tag{3.1.4}$$

在某种意义下, 当 $\Delta t_j \to 0$ 时, 右边是否存在极限? 如果极限存在, 则利用通常的积分记号, 将得到

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s. \tag{3.1.5}$$

习惯地认为 (3.1.2) 真正的意思是: $X_t = X_t(\omega)$ 是一个满足 (3.1.5) 的随机过程. 在本章的剩余部分, 将在确定的定义下证明

$$\int_0^t f(s,\omega)dB_s(\omega)$$

的存在性. 这里 $B_t(\omega)$ 是初始点为原点的 1 维布朗运动, 函数 $f : [0,\infty) \times \omega \to \mathbf{R}$ 是某类较广的函数. 在第 5 章将讨论 (3.1.5) 的解.

假定 $0 \leqslant S \leqslant T$, $f(t,\omega)$ 是给定的函数, 要定义

$$\int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega). \tag{3.1.6}$$

首先对简单函数类 f 给出上式的定义, 然后通过近似化过程推广上述定义. 因此先假定 f 具有下列形式:

$$\phi(t,\omega) = \sum_{j \geqslant 0} e_j(\omega) \cdot \mathcal{X}_{[j2^{-n},(j+1)2^{-n}]}(t), \tag{3.1.7}$$

这里 $\mathcal{X}$ 定义为特征 (示性) 函数, n 是一个自然数. 对这样的函数定义:

$$\int_S^T \phi(t,\omega)dB_t(\omega) = \sum_{j \geqslant 0} e_j(\omega)[B_{t_{j+1}} - B_{t_j}](\omega) \tag{3.1.8}$$

是合理的, 这里

$$t_k = t_k^{(n)} = \begin{cases} k \cdot 2^{-n}, & \text{如果 } S \leqslant k \cdot 2^{-n} \leqslant T; \\ S, & \text{如果 } k \cdot 2^{-n} < S; \\ T, & \text{如果 } k \cdot 2^{-n} > T. \end{cases}$$

然而对函数 $e_j(\omega)$ 没有任何假定, 将会像下面的例子一样遇到一定的困难. 在下面假定 E 表示 E^0, 即关于初始点为 0 的布朗运动的概率 P^0 的期望. P 与 P^0 定义相同.

例 3.1.1 设

$$\phi_1(t,\omega)=\sum_{j\geqslant 0} B_{j2^{-n}}(\omega)\cdot \mathcal{X}_{[j2^{-n},(j+1)2^{-n})}(t),$$

$$\phi_2(t,\omega)=\sum_{j\geqslant 0} B_{(j+1)2^{-n}}(\omega)\cdot \mathcal{X}_{[j2^{-n},(j+1)2^{-n})}(t).$$

因为 $\{B_t\}$ 有独立增量, 则

$$E\Big[\int_0^T \phi_1(t,\omega)dB_t(\omega)\Big]=\sum_{j\geqslant 0} E[B_{t_j}(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})]=0,$$

但是

$$E\Big[\int_0^T \phi_2(t,\omega)dB_t(\omega)\Big]=\sum_{j\geqslant 0} E[B_{t_{j+1}}(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})]$$

$$=\sum_{j\geqslant 0} E[(B_{t_{j+1}}-B_{t_j})^2]=T.$$

因此, 尽管两个函数 ϕ_1 和 ϕ_2 都是 $f(t,\omega)=B_t(\omega)$ 的很合理的近似, 而由 (3.1.8), 它们的积分却对任意大的 n 来讲都相去甚远.

这反映了 B_t 的路径变化太大, 而无法在 Riemann-Stieltjes 意义下定义积分 (3.1.6). 事实上, 可以证明布朗运动的路径: $t\to B_t(\omega)$ 几乎必然地 (a.s.) 处处不可微 (Breiman, 1968). 特别, 几乎必然地路径的总变差为 ∞.

一般地, 对一个给定的函数 $f(t,\omega)$, 用

$$\sum_j f(t_j^*,\omega)\cdot \mathcal{X}_{[t_j,t_{j+1})}(t)$$

去近似是很自然的, 其中点 t_j^* 在区间 $[t_j;t_{j+1}]$ 内. 再定义 $\int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega)$ 为 $\sum_j f(t_j^*,\omega)[B_{t_{j+1}}-B_t](\omega)$, 在 $n\to\infty$ 时的某种意义下的极限, 然而上面的例子表明了并不像 Riemann-Stieltjes 积分一样. 这里的极限值与 t_j^* 的选择是有关的. 下面的两种选择被认为是最有用的选择:

1) $t_j^*=t_j$(左端点), 此时积分记为 $\int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega)$, 称之为 Itô 积分.

2) $t_j^*=(t_j+t_{j+1})/2$(中点), 此时积分记为 $\int_S^T f(t,\omega)\circ dB_t(\omega)$, 称之为 Stratonovich 积分 (Protter, 2004, 第 V 章 5.30).

在本章最后, 将会解释上述两种选择方法是最好的, 并讨论这两种积分的联系与区别.

在任何情况下, 为了获得合理的积分定义, 在 (3.1.6) 中对 $f(t,\omega)$ 应限制在某类特殊的函数之中, 比如像 (3.1.7) 一样. 这里介绍 Itô 的选择. $t_j^* = t_j$ 时, 近似化的过程表明 f 应具有下列性质: $\omega \to f(t_j,\omega)$ 仅依赖于 $B_s(\omega)$ 在时间 t_j 之前的表现. 这导致了下面的重要的概念:

定义 3.1.2 设 $B_t(\omega)$ 是 n 维布朗运动, 定义 $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^{(n)}$ 是由随机变量 $\{B_i(s)\}_{1\leqslant i\leqslant n,\ 0\leqslant s\leqslant t}$ 产生的 σ 代数. 换句话说, $\mathcal{F}_t$ 是包括所有形如

$$\{\omega;\ B_{t_1}(\omega)\in F_1,\cdots,B_{t_k}(\omega)\in F_k\}$$

的集合的最小 σ 代数. 这里 $t_j\leqslant t, F_j\subset \mathbf{R}^n$ 是 Borel 集, $j\leqslant k=1,2,\cdots$(假定所有零测度集都包含在 $\mathcal{F}_t$ 中).

可认为 $\mathcal{F}_t$ 是“B_s 直到时刻 t 之前的历史”. 一个函数 $h(\omega)$ 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的充要条件是 h 能写成下列形式的函数

$$g_1(B_{t_1})g_2(B_{t_2})\cdots g_k(B_{t_k})$$

的和的极限函数 (几乎处处收敛意义下), 这里 $g_1,g_2,\cdots,g_k$ 是有界的连续函数. $t_j\leqslant t,\ j\leqslant k,\ k=1,2,\cdots$(见练习 3.14). 直观上, h 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的意味着 $h(\omega)$ 的值能由 $B_s(\omega), s\leqslant t$ 的值来决定. 例如, $h_1(\omega)=B_{\frac{t}{2}}(\omega)$ 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的. 但 $h_2(\omega)=B_{2t}(\omega)$ 不是 $\mathcal{F}_t$ 可测的.

注意, $\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t$ 对任意的 $s<t$(即 $\{\mathcal{F}_t\}$ 是增列), 对任意的 t, $\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}$.

定义 3.1.3 设 $\{\mathcal{N}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是 Ω 上的单调递增的 σ 代数族. 过程 $g(t,\omega):[0,\infty)\times\Omega\to\mathbf{R}^n$ 如果满足对任意的 $t\geqslant 0$, 函数 $\omega\to g(t,\omega)$ 是 $\mathcal{N}_t$ 可测的, 则称过程 $g(t,\omega)$ 是 $\mathcal{N}_t$ 适应的.

因此过程 $h_1(t,\omega)=B_{t/2}(\omega)$ 是 $\mathcal{F}_t$ 适应的. 但 $h_2(t,\omega)=B_{2t}(\omega)$ 不是 $\mathcal{F}_t$ 适应的. 现在对 Itô 积分定义中要求的函数类进行描述.

定义 3.1.4 设 $\mathcal{V}=\mathcal{V}(S,T)=\{f(t,\omega):[0,\infty)\times\Omega\to\mathbf{R}\}$ 且其中 f 应满足:

(a) $(t,\omega)\to f(t,\omega)$ 是 $\mathcal{B}\times\mathcal{F}$ 可测的, 其中 $\mathcal{B}$ 是 $[0,\infty)$ 上 Borel σ 代数.

(b) $f(t,\omega)$ 是 $\mathcal{F}_t$ 适应的.

(c) $E\left[\int_S^T f(t,\omega)^2dt\right]<\infty$.

Itô 积分

对函数 $f\in\mathcal{V}$, 将怎样去定义 Itô 积分

$$\mathcal{I}[f](\omega)=\int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega),$$

这里 B_t 是 1 维的布朗运动.

思想是自然的: 首先定义一类较简单的函数的 Itô 积分 $\mathcal{I}[\phi]$. 然后证明对 $\forall f \in \mathcal{V}$ 能 (在某种合适的意义上) 被 ϕ 函数逼近, 再定义 $\int f dB$ 作为 $\int \phi dB$ 在 $\phi \to f$ 时的极限.

现在给出详细的构造: 先定义基本函数, 函数 $\phi \in \mathcal{V}$ 如果有下面形式

$$\phi(t,\omega) = \sum_j e_j(\omega) \cdot \mathcal{X}_{[t_j,t_{j+1})}(t), \tag{3.1.9}$$

则称 ϕ 为基本函数. 注意因为 $\phi \in \mathcal{V}$, 因此每个 $e_j(\omega)$ 必定是 $\mathcal{F}_{t_j}$ 可测的. 故在例 3.1.1 中的函数 ϕ_1 是基本的, 但 ϕ_2 则不是基本的.

对基本函数 $\phi(t,\omega)$, 随机积分的定义按 (3.1.8) 给出

$$\int_S^T \phi(t,\omega) dB_t(\omega) = \sum_{j\geqslant 0} e_j(\omega)[B_{t_{j+1}} - B_{t_j}](\omega). \tag{3.1.10}$$

先证明下面的重要引理:

引理 3.1.5(Itô 等距)　如果 $\phi(t,\omega)$ 是有界的基本函数, 那么

$$E\Big[\Big(\int_S^T \phi(t,\omega)dB_t(\omega)\Big)^2\Big] = E\Big[\int_S^T \phi(t,\omega)^2 dt\Big]. \tag{3.1.11}$$

证明　记 $\Delta B_j = B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$, 则 $i \leqslant j$ 时, $e_i e_j \Delta B_i$ 与 ΔB_j 是独立的.

$$E[e_i e_j \Delta B_i \Delta B_j] = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ E[e_j^2(t_{j+1} - t_j)], & i = j. \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} E\Big[\Big(\int_S^T \phi dB\Big)^2\Big] &= \sum_{i,j} E[e_i e_j \Delta B_i \Delta B_j] \\ &= \sum_j E[e_j^2](t_{j+1} - t_j) = E\Big[\int_S^T \phi^2 dt\Big]. \end{aligned}$$

上面的等距 (3.1.11) 可由基本函数推广到 $\mathcal{V}$ 中的任意函数. 分几个步骤进行:

第 1 步. 对有界函数 $g \in \mathcal{V}$ 且 $g(t,\omega)$ 对每个给定的 ω 关于 t 连续. 那么存在基本函数 $\phi_n \in \mathcal{V}$ 使得

$$E\Big[\int_S^T (g - \phi_n)^2 dt\Big] \to 0, \quad 当\ n \to \infty\ 时.$$

证明　定义 $\phi_n(t,\omega) = \sum_j g(t_j,\omega)\mathcal{X}_{[t_j,t_{j+1}]}(t)$. 则 ϕ_n 是基本函数, 因为 $g \in \mathcal{V}$,

且对每个 ω,$g(\cdot,\omega)$ 是连续的, 故当 $n\to\infty$ 时有

$$\int_S^T (g-\phi_n)^2 dt \to 0.$$

由有界收敛定理有

$$E\Big[\int_S^T (g-\phi_n)^2 dt\Big] \to 0, \quad 当\ n\to\infty\ 时.$$

第 2 步. 设 $h\in\mathcal{V}$ 是有界的, 则存在有界函数 $g_n\in\mathcal{V}$, 使得对所有的 ω 及 $n, g_n(\cdot,\omega)$ 关于 t 连续, 且有

$$E\Big[\int_S^T (h-g_n)^2 dt\Big] \to 0.$$

证明　假定 $|h(t,\omega)|\leqslant M$ 对所有的 (t,ω) 成立, 对给定的 n, 设 ψ_n 是 $\mathbf{R}$ 上的非负连续函数, 且满足:

(i) 当 $x\leqslant -\dfrac{1}{n}$ 或 $x\geqslant 0$ 时, $\psi_n(x)=0$;

(ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n(x)dx=1$.

定义

$$g_n(t,\omega)=\int_0^t \psi_n(s-t)h(s,\omega)ds,$$

那么 $g_n(\cdot,\omega)$ 对每个 ω 关于 t 是连续的, 且 $|g_n(t,\omega)|\leqslant M$. 因为 $h\in\mathcal{V}$, 可以证明 $g_n(t,\cdot)$ 对任意的 t 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的 (精妙之处就在于此, 详细过程见文献 (Karatzas, Shreve, 1991, 第 133 页)). 而且对每个 ω, 当 $n\to\infty$ 时, 有

$$\int_S^T (g_n(s,\omega)-h(s,\omega))^2 ds \to 0.$$

由于 $\{\psi_n\}_n$ 构成了一个近似单位元 (Hoffman, 1962, 第 22 页), 由有界收敛定理得当 $n\to\infty$ 时,

$$E\Big[\int_S^T (h(t,\omega)-g_n(t,\omega))^2 dt\Big] \to 0.$$

第 3 步. 设 $f\in\mathcal{V}$, 则存在序列 $\{h_n\}\subset\mathcal{V}$, 对每个给定的 n, h_n 有界, 且满足:

$$E\Big[\int_S^T (f-h_n)^2 dt\Big] \to 0, \quad 当\ n\to\infty\ 时.$$

证明　设

$$h_n(t,\omega)=\begin{cases} -n, & 当\ f(t,\omega)<-n\ 时; \\ f(t,\omega), & 当\ -n\leqslant f(t,\omega)\leqslant n\ 时; \\ n, & 当\ f(t,\omega)\geqslant n\ 时. \end{cases}$$

则由控制收敛定理可知有结论成立. 现在准备完成 Itô 积分的定义:

对 $\forall f \in \mathcal{V}$, 由第 1~3 步可知, 存在基本函数 $\phi_n \in \mathcal{V}$. 使得

$$E\Big[\int_S^T |f-\phi_n|^2 dt\Big] \to 0.$$

然后定义

$$\mathcal{I}[f](\omega) := \int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega) := \lim_{n\to\infty}\int_S^T \phi_n(t,\omega)dB_t(\omega).$$

因为由 (3.1.11) 有 $\int_S^T \phi_n(t,\omega)dB_t(\omega)$ 是 $L^2(P)$ 中的 Cauchy 序列, 故在 $L^2(P)$ 中存在极限, 所以上述定义合理. 概括如下:

定义 3.1.6(Itô 积分) 设 $f \in \mathcal{V}(S,T)$. 则 f 的 Itô 积分 (从 S 到 T) 定义为

$$\int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega) = \lim_{n\to\infty}\int_S^T \phi_n(t,\omega)dB_t(\omega), \tag{3.1.12}$$

这里极限是在 $L^2(P)$ 中的极限意义. $\{\phi_n\}$ 是基本函数序列且满足:

$$E\Big[\int_S^T (f(t,\omega)-\phi_n(t,\omega))^2 dt\Big] \to 0, \quad 当\ n\to\infty\ 时. \tag{3.1.13}$$

注意由上面的步骤 1~3 可知, 满足 (3.1.13) 的序列 $\{\phi_n\}$ 是存在的. 而且由 (3.1.11) 可知 (3.1.12) 中的极限是存在的, 且不依赖于 (3.1.13) 中的 $\{\phi_n\}$ 的选择. 另外, 从 (3.1.11) 和 (3.1.12) 可得到下面重要的推论.

推论 3.1.7(Itô 等距) 对 $\forall f \in \mathcal{V}(S,T)$ 有

$$E\Big[\Big(\int_S^T f(t,\omega)dB_t\Big)^2\Big] = E\Big[\int_S^T f^2(t,\omega)dt\Big]. \tag{3.1.14}$$

推论 3.1.8 如果 $f(t,\omega) \in \mathcal{V}(S,T), n=1,2,\cdots$ 且 $E\Big[\int_S^T (f_n(t,\omega)-f(t,\omega))^2 dt\Big] \to 0$, 当 $n\to\infty$ 时. 那么, 当 $n\to\infty$ 时, 有

$$\int_S^T f_n(t,\omega)dB_t(\omega) \to \int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega),$$

上述极限是在 $L^2(P)$ 中的极限.

下面用例子说明上述积分.

例 3.1.9 假设 $B_0 = 0$, 那么

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t.$$

证明 设 $\phi_n(s,\omega) = \sum B_j(\omega) \cdot \mathcal{X}_{[t_j,t_{j+1})}(s)$, 这里 $B_j = B_{t_j}$, 则当 $\Delta t_j \to 0$ 时, 有

$$E\Big[\int_0^t (\phi_n - B_s)^2 ds\Big] = E\Big[\sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (B_j - B_s)^2 ds\Big]$$
$$= \sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} (s - t_j) ds = \sum_j \frac{1}{2}(t_{j+1} - t_j)^2 \to 0,$$

因此, 由推论 3.1.8 有

$$\int_0^t B_s dB_s = \lim_{\Delta t_j \to 0} \int_0^t \phi_n dB_s = \lim_{\Delta t_j \to 0} \sum_j B_j \Delta B_j$$

(见练习 3.13). 现在

$$\Delta(B_j^2) = B_{j+1}^2 - B_j^2 = (B_{j+1} - B_j)^2 + 2B_j(B_{j+1} - B_j)$$
$$= (\Delta B_j)^2 + 2B_j \Delta B_j,$$

由 $B_0 = 0$, 因此

$$B_t^2 = \sum_j \Delta(B_j^2) = \sum_j (\Delta B_j)^2 + 2\sum_j B_j \Delta B_j,$$

由此得出

$$\sum_j B_j \Delta B_j = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} \sum_j (\Delta B_j)^2.$$

因为在 $L^2(P)$ 中, 当 $\Delta t_j \to 0$ 时, $\sum_j (\Delta B_j)^2 \to t$ (见练习 2.17), 因此得出结论.

多出来的项 $-\frac{1}{2}t$ 表明 Itô 积分并不像普通的微积分一样, 在下面的章节中, 将建立 Itô 积分公式, 由此解释上述例子的结果, 并且 Itô 积分公式将使很多的随机积分变得容易计算.

3.2 Itô 积分的性质

定理 3.2.1 设 $f, g \in \mathcal{V}(0,T), 0 \leqslant S < U < T$. 那么

(a) $\int_S^T f dB_t = \int_S^U f dB_t + \int_U^T f dB_t$ 对几乎所有的 ω 成立.

(b) $\int_S^T (cf + g) dB_t = c \cdot \int_S^T f dB_t + \int_S^T g dB_t$ (c 为常数)对几乎所有的 ω 成立.

(c) $E\left[\int_S^T f dB_t\right] = 0.$

(d) $\int_S^T f dB_t$ 是 $\mathcal{F}_T$ 可测的.

证明 显然对 f, g 为基本函数 (a)~(d) 都成立. 然后通过极限性质可得到对 $\forall\ f, g \in \mathcal{V}[0,T]$ 也成立.

Itô积分的一个重要性质是它是一个鞅.

定义 3.2.2 在 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上的一个 σ 代数流是一族 σ 代数 $\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_t\}_{t\geqslant 0}, \mathcal{M}_t \subset \mathcal{F}$ 且满足

$$0 \leqslant s < t \Rightarrow \mathcal{M}_s \subset \mathcal{M}_t$$

(即 $\{\mathcal{M}_t\}$ 是递增的). $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一个 n 维随机过程 $\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 相对于 σ 代数流 $\{\mathcal{M}_t\}_{t\geqslant 0}$(及概率 P) 称为鞅, 如果满足:

(a) 对所有的 t, M_t 是 $\mathcal{M}_t$ 可测的.

(b) $E[|M_t|] < \infty, \forall\ t$.

(c) $E[M_s|\mathcal{M}_t] = M_t$, 对所有的 $s \geqslant t$.

这里 (b) 中的期望和 (c) 中的条件期望都是在概率测度 $P = P^0$ 下取的 (见附录 B 关于条件期望的概述).

例 3.2.3 $\mathbf{R}^n$ 中的布朗运动 B_t 相对于由 $\{B_s;\ s \leqslant t\}$ 产生的 σ 代数 $\mathcal{F}_t$ 是一个鞅, 因为

$$(E[|B_t|])^2 \leqslant E[|B_t|^2] = |B_0|^2 + nt.$$

如果 $s \geqslant t$, 那么

$$\begin{aligned} E[B_s|\mathcal{F}_t] &= E[B_s - B_t + B_t|\mathcal{F}_t] \\ &= E[B_s - B_t|\mathcal{F}_t] + E[B_t|\mathcal{F}_t] \\ &= 0 + B_t = B_t, \end{aligned}$$

这里利用了 $E[(B_s - B_t)|\mathcal{F}_t] = E[B_s - B_t] = 0$, 因为 $B_s - B_t$ 与 $\mathcal{F}_t$ 是独立的 (见 (2.2.11) 和定理 B.2.d), 及 $E[B_t|\mathcal{F}_t] = B_t$. 因为 B_t 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的 (见定理 B.2.c)).

对连续鞅, 有下面的重要的由 Doob 建立的不等式 (Strooek, Varadhan, 1979, 定理 1.2.3; Revuz, You, 1991, 定理 2.1.7).

定理 3.2.4(Doob 鞅不等式) 如果 M_t 是一个鞅且满足: $t \to M_t(\omega)$ 几乎必然地连续. 那么对所有的 $p \geqslant 1, T \geqslant 0$ 及 $\lambda > 0$, 有

$$P\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T} |M_t| \geqslant \lambda\right] \leqslant \frac{1}{\lambda^p} \cdot E[|M_T|^p].$$

现在利用这个不等式去证明 Itô 积分

$$\int_0^t f(s,\omega) dB_s$$

能被选择连续地依赖于 t.

定理 3.2.5　设 $f \in \mathcal{V}(0,T)$, 则存在

$$\int_0^t f(s,\omega)dB_s(\omega), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

的一个 t 连续的修正, 即存在一个 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的 t 连续的随机过程 J_t 使得

$$P\Big[J_t = \int_0^t f dB\Big] = 1, \quad \text{对所有的 } t, 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{3.2.1}$$

证明　设 $\phi_n = \phi_n(t,\omega) = \sum_j e_j^{(n)}(\omega)\mathcal{X}_{[t_j^{(n)},t_{j+1}^{(n)})}(t)$ 是基本函数, 使得

$$E\Big[\int_0^T (f-\phi_n)^2 dt\Big] \to 0, \quad n \to \infty.$$

设

$$I_n(t,\omega) = \int_0^t \phi_n(s,\omega)dB_s(\omega)$$

和

$$I_t = I(t,\omega) = \int_0^t f(s,\omega)dB_s(\omega), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

则对所有的 $n, I_n(\cdot,\omega)$ 是连续的, 而且对所有的 $n, I_n(t,\omega)$ 相对于 $\mathcal{F}_t$ 是一个鞅: 当 $t < s$ 时,

$$\begin{aligned}
E[I_n(s,\omega)|\mathcal{F}_t] &= E\Big[\Big(\int_0^t \phi_n dB + \int_t^s \phi_n dB\Big)|\mathcal{F}_t\Big] \\
&= \int_0^t \phi_n dB + E\Big[\sum_{t \leqslant t_j^{(n)} \leqslant t_{j+1}^{(n)} \leqslant s} e_j^{(n)} \Delta B_j | \mathcal{F}_t\Big] \\
&= \int_0^t \phi_n dB + \sum_j E[E[e_j^{(n)}\Delta B_j|\mathcal{F}_{t_j^{(n)}}]|\mathcal{F}_t] \\
&= \int_0^t \phi_n dB + \sum_j E[e_j^{(n)} E[\Delta B_j|\mathcal{F}_{t_j^{(n)}}]|\mathcal{F}_t] \\
&= \int_0^t \phi_n dB = I_n(t,\omega),
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

此处利用了定理 B.3 和定理 B.2.d.

因此 $I_n - I_m$ 也是一个 $\mathcal{F}_t$ 鞅, 故由鞅不等式 (定理 3.2.4), 当 $m,n \to \infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}
P[\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |I_n(t,\omega) - I_m(t,\omega)| > \varepsilon] &\leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot E[|I_n(T,\omega) - I_m(T,\omega)|^2] \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} E\Big[\int_0^T (\phi_n - \phi_m)^2 ds\Big] \to 0,
\end{aligned}$$

因此可以选择一个子序列 $n_k \uparrow \infty$ 使得

$$P\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|I_{n_{k+1}}(t,\omega)-I_{n_k}(t,\omega)|>2^{-k}\Big]<2^{-k}.$$

由 Borel-Contelli 引理知

$$P\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|I_{n_{k+1}}(t,\omega)-I_{n_k}(t,\omega)|>2^{-k},\ \text{对无穷多个}\ k\Big]=0,$$

因此对几乎所有的 ω, 存在 $k_1(\omega)$ 使得

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|I_{n_{k+1}}(t,\omega)-I_{n_k}(t,\omega)|\leqslant 2^{-k},\text{对}\ k\geqslant k_1(\omega),$$

故此 $I_{n_k}(t,\omega)$ 在 $[0,T]$ 上对几乎所有的 ω 是一致收敛的. 因此它的极限函数定义为 $J_t(\omega)$ 是 t 连续的, 对 $t\in[0,T]$, 几乎必然地成立. 又由于对所有的 t, 在 $L^2(P)$ 中, $I_{n_k}(t,\cdot)\to I(t,\cdot)$, 因此一定有

$$I_t=J_t,\ \text{a.s.},\quad \forall\, t\in(0,T].$$

从现在开始, 将总假定 $\int_0^t f(s,\omega)dB_s(\omega)$ 表示积分的一个 t 连续的修正.

推论 3.2.6 设对所有的 T, $f(t,\omega)\in\mathcal{V}(0,T)$, 那么

$$M_t(\omega)=\int_0^t f(s,\omega)dB_s$$

关于 $\mathcal{F}_t$ 是一个鞅, 且有

$$P\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|M_t|\geqslant\lambda\right]\leqslant\frac{1}{\lambda^2}E\Big[\int_0^T f(s,\omega)^2ds\Big],\quad \lambda,\ T>0. \tag{3.2.3}$$

证明 由 (3.2.2) 和 M_t 几乎必然地 t 连续, 及鞅不等式 (定理 3.2.4) 结合 Itô 等距 (3.1.14) 可得出结论.

3.3 Itô 积分的扩张

对于 Itô 积分 $\int fdB$, 可把条件 $f\in\mathcal{V}$ 的要求放宽到一个更大的类上来定义. 首先, 定义 3.1.4 中的可测性条件 (b) 能放松为下面的条件:

(b)′ 存在一个单调递增的 σ 代数族 $\mathcal{H}_t; t\geqslant 0$, 使得

1) B_t 相对于 $\mathcal{H}_t$ 是一个鞅.

2) f_t 是 $\mathcal{H}_t$ 适应的.

注意到 1) 隐含着 $\mathcal{F}_t\subset\mathcal{H}_t$. 扩张的本质是能允许 f_t 依赖于一个比 $\mathcal{F}_t$ 更大的 σ 代数流. 只要 B_t 相对于 f_s 的“历史” $s\leqslant t$ 时仍保持为鞅即可. 如果 $(b)'$ 成立,

那么 $E[B_s - B_t|\mathcal{H}_t] = 0$, 对任意的 $s > t$. 由上面的证明可知, 可像前面一样构造 Itô 积分.

(b) 不成立而 (b)′ 成立的一个重要例子如下:

假定 $B_t(\omega) = B_k(t,\omega)$ 是 n 维布朗运动 $(B_1, B_2, \cdots, B_n)$ 的第 k 个坐标, 设 $\mathcal{F}_t^{(n)}$ 是由 $B_1(s_1,\cdot), \cdots, B_n(s_n,\cdot)$ 生成的 σ 代数, $s_k \leqslant t$. 则 $B_k(t,\omega)$ 相对于 $\mathcal{F}_t^{(n)}$ 是一个鞅. 因为当 $s > t$ 时, $B_k(s,\cdot) - B_k(t,\cdot)$ 与 $\mathcal{F}_t^{(n)}$ 独立, 因此可在 (b)′ 中选择 $\mathcal{H}_t = \mathcal{F}_t^{(n)}$, 由此只要 $f(t,\omega)$ 是关于 $\mathcal{F}_t^{(n)}$ 适应的, 就可定义 $\int_0^t f(s,\omega)dB_k(s,\omega)$. 比如积分像 $\int B_2 dB_1$ 或 $\int \sin(B_1^2 + B_2^2)dB_2$, 包括 n 维布朗运动的 n 个分量等 (这里把 $dB_1(t,\omega)$ 简写成 dB_1, 等等).

这样可如下定义多维的 Itô 积分.

定义 3.3.1 设 $B = (B_1, B_2, \cdots, B_n)$ 是 n 维布朗运动, 那么 $\mathcal{V}_H^{m\times n}(S,T)$ 定义为 $m \times n$ 阶矩阵 $v = [v_{ij}(t,\omega)]$ 之全体集合, 其中 $v_{ij}(t,\omega)$ 相对于某个 σ 代数流 $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_t\}_{t\geqslant 0}$ 满足定义 3.1.4 中的 (a) 和 (c) 及上面中的 (b)′.

如果 $v \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}^{m\times n}(S,T)$, 利用矩阵概念定义

$$\int_S^T v dB = \int_S^T \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{m1} & \cdots & v_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_1 \\ \vdots \\ dB_n \end{pmatrix}$$

是 $m \times 1$ 阶矩阵 (列向量), 其中第 i 个分量是下面的 (扩张之后) Itô 积分之和:

$$\sum_{j=1}^n \int_S^T v_{ij}(s,\omega)dB_j(s,\omega).$$

如果 $\mathcal{H} = \mathcal{F}^n = \{\mathcal{F}_t^{(n)}\}_{t\geqslant 0}$, 把 $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}^{m\times n}(S,T)$ 简记为 $\mathcal{V}^{m\times n}(S,T)$. 如果 $m = 1$, 记 $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}^n(S,T)$(相应地 $\mathcal{V}^n(S,T)$ 替代 $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}^{1\times n}(S,T)$)(相应地 $\mathcal{V}^{1\times n}(S,T)$). 同样记

$$\mathcal{V}^{m\times n} = \mathcal{V}^{m\times n}(0,\infty) = \bigcap_{T>0} \mathcal{V}^{m\times n}(0,T).$$

下面把定义 3.1.4 中的条件 (c) 放弱为

(c)′ $P\left[\int_S^T f(s,\omega)^2 ds < \infty\right] = 1.$

定义 3.3.2 $\mathcal{W}_{\mathcal{H}}(S,T)$ 定义为满足定义 3.1.4 中的条件 (a) 和上面的 (b)′ 及 (c)′ 的过程 $f(t,\omega) \in \mathbf{R}$ 之全体的集合. 类似于 $\mathcal{V}$ 的概念, 记 $\mathcal{W}_{\mathcal{H}} = \bigcap_{T>0} \mathcal{W}_{\mathcal{H}}(0,T)$, 在矩阵情形写为 $\mathcal{W}_{\mathcal{H}}^{m\times n}(S,T)$ 等等. 如果 $\mathcal{H} = \mathcal{F}^{(n)}$, 用 $\mathcal{W}(S,T)$ 代替 $\mathcal{W}_{\mathcal{F}^{(n)}}(S,T)$

等等. 如果维数很清楚不会混淆时, 有时省去上标而用 $\mathcal{F}$ 取代 $\mathcal{F}^{(n)}$ 等等.

设 B_t 为 1 维布朗运动, 如果 $f \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}$, 能证明对所有的 t, 存在阶梯函数 $f_n \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}$, 使得 $\int_0^t |f_n - f|^2 ds \to 0$ (依概率测度 P 收敛). 对这样一个序列, 可得到 $\int_0^t f_n(s,\omega)dB_s$ 依概率收敛于某一随机变量, 且它的极限只依赖于 f 而与序列 $\{f_n\}$ 的选择无关. 因此对 $f \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}$, 可定义

$$\int_0^t f(s,\omega)dB_s(\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t f_n(s,\omega)dB_s(\omega) \tag{3.3.1}$$

(依概率收敛意义下的极限), 像前一样, 这个积分存在一个 t 连续的修正. 详细过程见文献 (Firedman, 1975, 第 4 章; McKean, 1969, 第 2 章). 注意这个积分一般不是一个鞅, 例子见 Dudley 的定理 (定理 12.1.5), 然而它是一个局部鞅, 见文献 (Karatzas, Shreve, 1991, 第 146 页), 也可见练习 7.12.

Itô 积分和 Stratonovich 积分的比较

现在回到这章的初始问题. 对白噪声方程

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \cdot W_t \tag{3.3.2}$$

的数学解释是 X_t 是积分方程

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s \tag{3.3.3}$$

的解, 并且对 (3.3.3) 式中的最后的积分给出合理的解释. 然而像前面所表示的那样, 积分形式

$$\int_0^t f(s,\omega)dB_s(\omega)$$

的 Itô 解释只是几个合理的解释之一, 比如 Stratonovich 积分是另一种可能的解释, 且导致 (一般地) 不同的结果. 因此问题仍然是: 对上式的哪个解释使 (3.3.3) 成为方程 (3.3.2) 的 "正确的" 数学模型. 这里的讨论表明在某些情形下, Stratonovich 的解释可能更为合适: 选择 t 连续的可微过程 $B_t^{(n)}$ 使得对几乎所有的 ω,

$$B^{(n)}(t,\omega) \to B(t,\omega), \quad 当\ n \to \infty\ 时.$$

在有界区间上对 t 是一致收敛的. 对每个 ω, 记 $X_t^{(n)}(\omega)$ 为相应的 (确定性) 微分方程

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)\frac{dB_t^{(n)}}{dt}, \tag{3.3.4}$$

那么在同样的意义下 $X_t^{(n)}(\omega)$ 收敛于某个函数 $X_t(\omega)$：对几乎所有的 ω 在 t 的有界区间上，$X_t^{(n)}(\omega)$ 一致收敛于 $X_t(\omega)$(Wong, Zakai, 1969; Sussman, 1978)，表明这个解 X_t 与利用 Stratonovich 积分所获得的 (3.3.3) 的解是一致的，即

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) \circ dB_s, \tag{3.3.5}$$

它隐含着 X_t 是下面的修正了的 Itô 方程：

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma'(s, X_s)\sigma(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s \tag{3.3.6}$$

的解，其中 σ' 表示 $\sigma(t, x)$ 关于 x 的偏导数 (Stratonovich, 1966).

因此从这个观点来看，作为初始的白噪声方程 (3.3.2) 的数学模型解释，似乎利用 (3.3.6)(即 Stratonovich 解释) 比 Itô 解释

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s \tag{3.3.7}$$

更为合理.

另一方面，Itô 模型的特殊特色"不是看未来"(像例 3.1.1 的解释)，似乎使 Itô 解释在很多例子中是一个合理的选择，如在生物中的例子 (见 Turelli(1977) 的讨论). 这两个解释的差别在例 5.1.1 中将做说明，注意如果 $\sigma(t, x)$ 与 x 无关，则 (3.3.6) 与 (3.3.7) 是统一的. 如在第 6 章中处理线性的滤波问题时，就出现了这种情形.

不论什么情形，由于 (3.3.6) 表明了两个模型的显性联系 (对于高准情形也有类似的关系，见 (6.1.3)). 一般只需对这两种类型的积分中的一种做数学处理即可达到目的. 一般地，人们认为 Stratonovich 积分在做变量代换时有普通链规则的优点，即在 Stratonovich 模拟 Itô 变换公式时没有二阶项 (见定理 4.1.2 和定理 4.2.1). 这个性质使得 Stratonovich 积分自然地作为例子与流形上的随机微分方程紧密联系在一起 (Elworthy, 1982; Ikeda, Watanabe, 1989).

然而 Stratonovich 积分不是鞅，但 Itô 积分是鞅，这使得 Itô 积分虽然在变换上并不完美，但在计算上却有重要的优势. 因此 Itô 积分更为方便，从现在起将主要讨论 Itô 积分.

练　习

除非有其他说明，下面 B_t 都表示 $\mathbf{R}$ 中布朗运动，$B_0 = 0$.

3.1.* 由 Itô 积分的定义 (定义 3.1.6) 直接证明

$$\int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds.$$

提示: 注意 $\sum_j \Delta(s_jB_j) = \sum_j s_j\Delta B_j + \sum_j B_{j+1}\Delta s_j$.

3.2. 直接由 Itô 积分的定义证明

$$\int_0^t B_s^2 dB_s = \frac{1}{3}B_t^3 - \int_0^t B_s ds.$$

3.3.* 如果 $X_t : \Omega \to \mathbf{R}^n$ 是一个随机过程, 设 $\mathcal{H}_t = \mathcal{H}_t^{(X)}$ 表示由 $\{X_s(\cdot); s \leqslant t\}$ 生成的 σ 代数 (即 $\{\mathcal{H}_t^{(X)}\}_{t\geqslant 0}$ 是过程 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 的流).

a) 证明: 如果 X_t 是关于某个流 $\{\mathcal{N}_t\}_{t\geqslant 0}$ 为鞅, 则 X_t 也是关于它自己的流 $\{\mathcal{H}_t^{(X)}\}_{t\geqslant 0}$ 为鞅.

b) 证明: 如果 X_t 是关于 $\mathcal{H}_t^{(X)}$ 为鞅, 则

$$E[X_t] = E[X_0], \quad \forall\, t \geqslant 0.$$

c) 举出满足上式的随机过程 X_t 的例子, 并且 X_t 关于它自己的流并不是一个鞅.

3.4.* 检验下面的过程 X_t 关于 $\{\mathcal{F}_t\}$ 是否为鞅:

(a) $X_t = B_t + 4t$;

(b) $X_t = B_t^2$;

(c) $X_t = t^2B_t - 2\int_0^t sB_s ds$;

(d) $X_t = B_1(t)B_2(t)$, 这里 $(B_1(t), B_2(t))$ 是 2 维的布朗运动.

3.5.* 直接证明 (不能利用例 3.1.9)

$$M_t = B_t^2 - t$$

是一个 $\mathcal{F}_t$ 鞅.

3.6.* 证明 $N_t = B_t^3 - 3tB_t$ 是一个鞅.

3.7. Itô (1951) 的一个著名的结果对 n 次多重 Itô 积分给出了下面的公式:

$$n!\int\cdots\int_{0\leqslant u_1\leqslant\cdots\leqslant u_n\leqslant t} dB_{u_1}dB_{u_2}\cdots dB_{u_n} = t^{\frac{n}{2}}h_n\left(\frac{B_t}{\sqrt{t}}\right), \tag{3.3.8}$$

这里 h_n 是 n 次 Hermite 多项式, 定义为

$$h_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right), \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

(因此 $h_0(x) = 1, h_1(x) = x, h_2(x) = x^2 - 1, h_3(x) = x^3 - 3x$).

a) 证明对任意的 n 次 Itô 积分, 上面的被积函数满足定义 3.1.4 的要求.

b) 结合例子 3.1.9 与练习 3.2, 对 $n = 1, 2, 3$, 证明公式 (3.3.8).

c) 利用 b) 对练习 3.6 给出一个新的证明.

3.8.* a) 设 Y 是 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的实值随机变量, 满足

$$E[|Y|] < \infty.$$

定义

$$M_t = E[Y|\mathcal{F}_t], \quad t \geqslant 0.$$

证明 M_t 是一个 $\mathcal{F}_t$ 鞅.

b) 相反地, 设 M_t, $t \geqslant 0$ 是一个实值的 $\mathcal{F}_t$ 鞅, 且满足对某个 $p > 1$ 有

$$\sup_{t \geqslant 0} E[|M_t^P|] < \infty.$$

证明存在 $Y \in L^1(P)$ 使得

$$M_t = E[Y|\mathcal{F}_t].$$

提示: 利用推论 C.7.

3.9.* 假定 $f \in \mathcal{V}(0,T)$, 且 $t \to f(t,\omega)$ 对几乎所有的 ω 是连续的. 证明

$$\int_0^T f(t,\omega)dB_t(\omega) = \lim_{\Delta t_j \to 0} \sum_j f(t_j,\omega)\Delta B_j$$

(在 $L^2(P)$ 中的极限定义下). 类似地, 定义 f 的 Stratonovich 积分:

$$\int_0^T f(t,\omega) \circ dB_t(\omega) = \lim_{\Delta t_j \to 0} \sum_j f(t_j^*,\omega)\Delta B_j,$$

这里 $t_j^* = \frac{1}{2}(t_j + t_{j+1})$, 前提是只要上式右端在 $L^2(P)$ 中存在极限. 一般地上述两个积分是不同的, 例如, 计算

$$\int_0^T B_t \circ dB_t,$$

并与例 3.1.9 进行比较.

3.10. 如果练习 3.9 中的函数 f 关于变量 t 是光滑的, 则关于 f 的 Itô 积分与 Stratonovich 积分是一致的. 更简单地, 假如存在常数 $k < \infty$ 及 $\varepsilon > 0$, 使得

$$E[|f(s,\cdot) - f(t,\cdot)|^2] \leqslant K|s-t|^{1+\varepsilon}, \quad 0 \leqslant s,t \leqslant T.$$

证明

$$\int_0^T f(t,\omega)dB_t = \lim_{\Delta t_j \to 0} \sum_j f(t_j',\omega)\Delta B_j$$

(上式是在 $L^1(P)$ 中的极限定义下) 对任意的 $t_j' \in [t_j, t_{j+1}]$. 特别

$$\int_0^T f(t,\omega)dB_t = \int_0^T f(t,\omega) \circ dB_t.$$

提示: 考虑 $E\left[\left|\sum_j f(t_j,\omega)\Delta B_j - \sum_j f(t_j',\omega)\Delta B_j\right|\right]$.

3.11. 设 W_t 是满足 (3.1.2) 式下面的条件 (a)~(c) 的随机过程, 证明 W_t 不可能有连续的路径. 提示: 考虑 $E[(W_t^{(N)} - W_s^{(N)})^2]$, 这里,

$$W_t^{(N)} = (-N) \vee (N \wedge W_t), \quad N = 1,2,3,\cdots.$$

3.12.* 如练习 3.9 一样用 $\circ dB_t$ 表示 Stratonovich 微分.

(i) 利用 (3.3.6) 把下面的 Stratonovich 微分方程转换成 Itô 微分方程:

(a) $dX_t = rX_t dt + \alpha X_t \circ dB_t$;

(b) $dX_t = \sin X_t \cos X_t dt + (t^2 + \cos X_t) \circ dB_t$.

(ii) 把下面的 Itô 微分方程转换成 Stratonovich 微分方程:

(a) $dX_t = rX_t + \alpha X_t dB_t$;

(b) $dX_t = 2e^{-X_t} dt + X_t^2 dB_t$.

3.13. 一个随机过程 $X_t(\cdot) : \Omega \to \mathbf{R}$, 如果满足对任意的 $t \geqslant 0$, $E[X_t^2] < \infty$, 且 $\lim_{s \to t} E[(X_s - X_t)^2] = 0$, 则称它为均方连续的.

a) 证明布朗运动 B_t 是均方连续的.

b) 设 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是一个 Lipschitz 连续函数, 即存在 $C < \infty$, 使得对任意的 $x, y \in \mathbf{R}$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|.$$

证明 $Y_t := f(B_t)$ 是均方连续的.

c) 设 X_t 是均方连续的随机过程且 $X_t \in \mathcal{V}(S, T), T < \infty$. 证明

$$\int_S^T X_t dB_t = \lim_{n \to \infty} \int_S^T \phi_n(t, \omega) dB_t(\omega),$$

这里

$$\phi_n(t, \omega) = \sum_j X_{t_j^{(n)}}(\omega) \mathcal{X}_{[t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)})}(t), \quad T < \infty.$$

提示: 考虑

$$E\Big[\int_S^T (X_t - \phi_n(t))^2 dt\Big] = E\Big[\sum_j \int_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}} (X_t - X_{t_j^{(n)}})^2 dt\Big].$$

3.14. 证明函数 $h(\omega)$ 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的充要条件是 (对几乎所有的 ω), h 为下面函数形式的和的极限函数:

$$g_1(B_{t_1}) \cdot g_2(B_{t_2}) \cdots g_k(B_{t_k}),$$

这里 $g_1, \cdots, g_k$ 是有界连续函数, $t_j \leqslant t$, $j \leqslant k, k = 1, 2, \cdots$. 提示: 完成下面的步骤:

a) 先假定 h 是有界的.

b) 对 $n = 1, 2, \cdots$ 和 $j = 1, 2, \cdots$, 记 $t_j = t_j^{(n)} = j \cdot 2^{-n}$. 对固定的 $n, \mathcal{H}_n$ 表示由 $\{B_{t_j}(\cdot)\}_{t_j \leqslant t}$ 生成的 σ 代数, 则由推论 C.9 有

$$h = E[h|\mathcal{F}_t] = \lim_{n \to \infty} E[h|\mathcal{H}_n]$$

(按点几乎处处收敛的极限).

c) 定义 $h_n := E[h/\mathcal{H}_n]$, 则由 Doob-Dynkin 引理 (引理 2.1.2), 有 $h_n(\omega) = G_n(B_{t_1}(\omega), \cdots, B_{t_k}(\omega))$, $G_n : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ 上的 Borel 函数, $k = \max\{j, j \cdot 2^{-n} \leqslant t\}$. 而任何 Borel 函数 $G : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ 能被连续函数 $F : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ 几乎处处逼近, 再应用 Stone-Weierstrass 定理可完成证明.

3.15.* 假定 $f, g \in \mathcal{V}(S,T)$, 且存在常数 C, D 使得

$$C + \int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega) = D + \int_S^T g(t,\omega)dB_t(\omega)$$

对几乎所有的 $\omega \in \Omega$ 成立. 证明 $C = D$ 且 $f(t,\omega) = g(t,\omega)$ 对几乎所有的 $(t,\omega) \in [S,T] \times \Omega$ 成立.

3.16. 设 $X : \Omega \to \mathbf{R}$ 是一个随机变量且 $E[X^2] < \infty, \mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ 是一个 σ 代数, 证明:

$$E[(E[X|\mathcal{H}])^2] \leqslant E[X^2]$$

(见引理 6.1.1, 也可见关于条件期望的 Jensen 不等式 (附录 B)).

3.17. 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个概率空间, 设 $X : \Omega \to \mathbf{R}$ 是一个随机变量且 $E[|X|] < \infty$, 如果 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ 是一个有限 σ 代数, 则由练习 2.7 知存在一个分解 $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$ 使得 $\mathcal{G}$ 是由 $\varnothing$ 和 $G_1, \cdots, G_n$ 的部分 (或全部) 之并构成的.

a) 解释为什么在每个 G_i 上, $E[X|\mathcal{G}](\omega)$ 是常数 (见练习 2.7c).

b) 假定 $P[G_i] > 0$, 证明对 $\omega \in G_i$ 有

$$E[X|\mathcal{G}](\omega) = \frac{\int_{G_i} XdP}{P(G_i)}.$$

c) 假如 X 只取有限多个值 $a_1, \cdots, a_m$, 则从初等概率的理论知 (见练习 2.1)

$$E[X|G_i] = \sum_{k=1}^{m} a_k P[X = a_k|G_i],$$

与 b) 比较并证明对 $\omega \in G_i$ 有

$$EX|G_i] = E[X|\mathcal{G}](\omega),$$

因此可认为在附录中定义的条件期望是初等概率论中条件期望的 (实质性) 的推广.

3.18. 设 B_t 是 1 维的布朗运动, $\sigma \in \mathbf{R}$ 是常数, 直接从定义证明

$$M_t := \exp\left(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right), \quad t \geqslant 0$$

是一个 $\mathcal{F}_t$ 鞅. 提示: 如果 $s > t$, 那么 $E\left[\exp(\sigma B_s - \frac{1}{2}\sigma^2 s)|\mathcal{F}_t\right] = E[\exp(\sigma(B_s - B_t)) \times \exp\left(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 s\right) |\mathcal{F}_t]$, 再利用定理 B.2e)、定理 B.2d) 和练习 2.20).

第 4 章　Itô 公式和鞅表示定理

4.1　1 维 Itô 公式

例 3.19 表明, 用 Itô 积分的基本定义去计算一个给定的积分时并不是很有用. 它类似于计算 Riemann 积分时一般都不会用定义计算, 而是用链规则和一些计算的基本定理运算.

在本节不讨论其他的理论而只考虑积分理论, 它有可能建立一个相应 Itô 积分的链规则, 即 Itô 公式. 将从例子表明, Itô 公式在计算 Itô 积分时是很有用的.

从例子

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t \quad \text{或} \quad \frac{1}{2}B_t^2 = \frac{1}{2}t + \int_0^t B_s dB_s \tag{4.1.1}$$

看出 Itô 积分 $B_t = \int_0^t dB_s$ 在映射 $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ 下的像 $\frac{1}{2}B_t^2$, 不再是形如

$$\int_0^t f(s,\omega)dB_s(\omega)$$

的积分, 而是关于 dB_s 和 dt 的积分的组合:

$$\frac{1}{2}B_t^2 = \int_0^t \frac{1}{2}ds + \int_0^t B_s dB_s. \tag{4.1.2}$$

它表明如果引入 Itô 过程 (也称为随机积分) 作为 dB_s 和 ds 的积分的和, 则这类积分在光滑映射下是稳定的.

定义 4.1.1(1 维 Itô 过程)　设 B_t 是 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的 1 维布朗运动, 一个 (1 维的)Itô 过程 (或随机积分) 是 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一个具有如下形式的随机过程 X_t:

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)ds + \int_0^t v(s,\omega)dB_s, \tag{4.1.3}$$

这里 $v \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}$, 使得

$$P\Big[\int_0^t v(s,\omega)^2 ds < \infty, \text{ 对所有的 } t \geqslant 0\Big] = 1 \tag{4.1.4}$$

(见定义 3.3.2), 同时假定 u 是 $\mathcal{H}_t$ 适应的 (这里 $\mathcal{H}_t$ 如 3.3 节的 (b)″ 一样) 且有

$$P\Big[\int_0^t |u(s,\omega)|ds < \infty, \text{ 对所有的 } t \geqslant 0\Big] = 1. \tag{4.1.5}$$

如果 X_t 是一个形如 (4.1.3) 的 Itô 过程, 则方程 (4.1.3) 有时写成较短的微分形式:

$$dX_t = udt + vdB_t. \tag{4.1.6}$$

如 (4.1.1)(或 (4.1.2)), 可表示成

$$d\left(\frac{1}{2}B_t^2\right) = \frac{1}{2}dt + B_t dB_t.$$

下面准备本章的第一个重要结果.

定理 4.1.2(1 维 Itô 公式)　设X_t 是一个如下的 Itô 过程:

$$dX_t = udt + vdB_t,$$

$g(t,x) \in C^2([0,\infty)\times \mathbf{R})$(即 g 是 $[0,\infty)\times \mathbf{R}$ 上的二阶连续可微的函数), 那么 $Y_t = g(t, X_t)$ 也是一个 Itô 过程, 且满足:

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,X_t)\cdot(dX_t)^2, \tag{4.1.7}$$

这里 $(dX_t)^2 = (dX_t)\cdot(dX_t)$ 由下面的规则来计算:

$$dt\cdot dt = dt\cdot dB_t = dB_t\cdot dt = 0, \quad dB_t\cdot dB_t = dt. \tag{4.1.8}$$

在证明 Itô 公式之前, 先看一些例子.

例 4.1.3　回顾积分

$$I = \int_0^t B_s dB_s.$$

选择 $X_t = B_t$ 及 $g(t,x) = \frac{1}{2}x^2$, 那么

$$Y_t = g(t, B_t) = \frac{1}{2}B_t^2.$$

则由 Itô 公式有

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}dt + \frac{\partial g}{\partial x}dB_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(dB_t)^2 = B_t dB_t + \frac{1}{2}(dB_t)^2 = B_t dB_t + \frac{1}{2}dt,$$

因此

$$d\left(\frac{1}{2}B_t^2\right) = B_t dB_t + \frac{1}{2}dt.$$

换一种形式则像第 3 章中一样有

$$\frac{1}{2}B_t^2 = \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2}t.$$

例 4.1.4　$\int_0^t s dB_s$ 是什么?

从经典的计算看出现 tB_t 这样的项是合理的. 因此设 $g(t,x) = tx$, $Y_t = g(t,B_t) = tB_t$, 那么由 Itô 公式,

$$dY_t = B_t dt + t dB_t + 0,$$

即

$$d(tB_t) = B_t dt + t dB_t$$

或

$$tB_t = \int_0^t B_s ds + \int_0^t s dB_s.$$

这样从分部积分的观点来看也是合理的. 更一般地, 同样的方法得出

定理 4.1.5(分部积分) 假定 $f(s,\omega)$ 对几乎所有的 ω 关于 $s \in [0,t]$ 是连续的且是有界变差 (见练习 2.17). 则有

$$\int_0^t f(s) dB_s = f(t)B_t - \int_0^t B_s df_s.$$

注意 f 具有有界变差是使上式成立的关键因素 (对一般情形见练习 4.3).

Itô 公式证明的大致思路: 如果把 $dX_t = udt + vdB_t$ 代入到 (4.1.7) 中, 且利用 (4.1.8) 得到等价的表达式

$$g(t,X_t) = g(0,X_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial g}{\partial s}(s,X_s) + u_s \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_s) + \frac{1}{2} v_s^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s,X_s)\right) ds$$
$$+ \int_0^t v_s \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_s) dB_s, \quad 这里\ u_s = u(s,\omega),\ v_s = v(s,\omega). \tag{4.1.9}$$

注意到 (4.1.9) 在定义 4.1.1 的意义下是一个 Itô 过程.

假定 $g, \frac{\partial g}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ 是有界的, 且在这种情形下 (4.1.9) 已被证明. 则对一般的 $[0,\infty) \times \mathbf{R}$ 上的 C^2 函数, 可用 g_n 近似, 使得 g, $\frac{\partial g_n}{\partial t}$, $\frac{\partial g_n}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial^2 g_n}{\partial x^2}$ 都有界且在 $[0,\infty) \times \mathbf{R}$ 上的任何紧子集上相应地一致收敛于 g, $\frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$(见练习 4.9), 而且从 (3.3.1) 可假定 $u(t,\omega)$ 和 $v(t,\omega)$ 都为基本函数. 由 Taylor 定理得到

$$\begin{aligned} g(t,X_t) &= g(0,X_0) + \sum_j \Delta g(t_j,X_j) \\ &= g(0,X_0) + \sum_j \frac{\partial g}{\partial t}\Delta t_j + \sum_j \frac{\partial g}{\partial x}\Delta x_j \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(\Delta t_j)^2 + \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x}(\Delta t_j)(\Delta x_j) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\Delta x_j)^2 + \sum_j R_j, \end{aligned}$$

这里 $\dfrac{\partial g}{\partial t}$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ 是在点 (t_j, X_{t_j}) 处取值. 对所有的 j, $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, $\Delta X_j = X_{j+1} - X_j, \Delta g(t_j, X_j) = g(t_{j+1}, X_{t_{j+1}}) - g(t_j, X_j)$, $R_j = o(|\Delta t_j|^2 + |\Delta X_j|^2)$. 如果 $\Delta t_j \to 0$, 那么有

$$\sum_j \frac{\partial g}{\partial t}\Delta t_j = \sum_j \frac{\partial g}{\partial t}(t_j, X_j)\Delta t_j \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial t}(s, X_s)ds, \tag{4.1.10}$$

$$\sum_j \frac{\partial g}{\partial x}\Delta X_j = \sum_j \frac{\partial g}{\partial x}(t_j, X_j)\Delta X_j \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s)dX_s, \tag{4.1.11}$$

而且, 因为 u 与 v 是基本的, 可得

$$\begin{aligned}\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\Delta X_j)^2 = &\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}u_j^2(\Delta t_j)^2 + 2\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}u_j v_j(\Delta t_j)(\Delta B_j)\\ &+\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}v_j^2 \cdot (\Delta B_j)^2, \quad \text{这里 } u_j = u(t_j,\omega),\ v_j = v(t_j,\omega).\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

当 $\Delta t_j \to 0$ 时, 上式前面两项是趋于零的. 如当 $\Delta t_j \to 0$ 时,

$$E\Big[\Big(\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}u_j v_j(\Delta t_j)(\Delta B_j)\Big)^2\Big] = \sum_j E\Big[\Big(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}u_j v_j\Big)^2\Big](\Delta t_j)^3 \to 0.$$

当 $\Delta t_j \to 0$ 时, (4.1.12) 式中最后一项在 $L^2(P)$ 中趋向于 $\displaystyle\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}v^2 ds$.

为了证明它, 设 $a(t) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)v^2(t,\omega)$, $a_j = a(t_j)$. 考虑

$$E\Big[\Big(\sum_j a_j(\Delta B_j)^2 - \sum_j a_j\Delta t_j\Big)^2\Big] = \sum_{i,j} E[a_i a_j((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i)((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j)],$$

如果 $i < j$, 则 $a_i a_j((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i)$ 和 $(\Delta B_j)^2 - \Delta t_j$ 是独立的, 因此该项的期望为零. 同理, $i > j$ 时也类似. 故此留下的项为 $i = j$ 的项, 即上式为当 $\Delta t_j \to 0$ 时,

$$\begin{aligned}&\sum_j E[a_j^2((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j)^2]\\ =&\sum_j E[a_j^2] \cdot E[(\Delta B_j)^4 - 2(\Delta B_j)^2\Delta t_j + (\Delta t_j)^2]\\ =&\sum_j E[a_j^2] \cdot (3(\Delta t_j)^2 - 2(\Delta t_j)^2 + (\Delta t_j)^2)\\ =&2\sum_j E[a_j^2](\Delta t_j)^2 \to 0,\end{aligned}$$

换句话说, 即有当 $\Delta t_j \to 0$ 时,

$$\sum_j a_j(\Delta B_j)^2 \to \int_0^t a(s)ds$$

(在 $L^2(P)$ 中收敛意义下). 它经常由公式简写成

$$(dB_t)^2 = dt. \tag{4.1.13}$$

上面的讨论也同样证明了当 $\Delta t_j \to 0$ 时, $\sum R_j \to 0$. 由此完成了 Itô 公式的证明.

附注 若 $U \subset \mathbf{R}$ 是一个开集, 使得对 $\forall\, t \geqslant 0$, $\omega \in \Omega$, $X_t(\omega) \in U$, 则 $g(t,x)$ 是 $[0,\infty)\times U$ 上的 C^2 函数就够了, 而且只要 $g(t,x)$ 关于 t 是 C^1 的而关于 x 是 C^2 的, 就可使 Itô 公式成立.

4.2 多维的 Itô 公式

现在转到高维的情形: 设 $B(t,\omega) = (B_1(t,\omega),\cdots,B_m(t,\omega))$ 表示 m 维布朗运动. 如果 $u_i(t,\omega)$ 与 $v_{ij}(t,\omega)(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m)$ 都满足定义 4.1.1 给出的条件, 则有下面的 Itô 过程

$$\begin{cases} dX_1 = u_1 dt + v_{11}dB_1 + \cdots + v_{1m}dB_m, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ dX_n = u_n dt + v_{n1}dB_1 + \cdots + v_{nm}dB_m, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

或用矩阵形式简写为

$$dX(t) = udt + vdB(t), \tag{4.2.2}$$

这里

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

$$v = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nm} \end{pmatrix}, \quad dB(t) = \begin{pmatrix} dB_1(t) \\ \vdots \\ dB_m(t) \end{pmatrix}. \tag{4.2.3}$$

这样的过程 $X(t)$ 称为 n 维 Itô 过程 (或就称为 Itô 过程), 自然要问: 关于对 X 光滑的函数有什么样的结果? 下面给出答案.

定理 4.2.1(一般的 Itô 公式) 设 $dX(t) = udt + vdB(t)$ 是如上的一个 n 维 Itô 过程, $g(t,x) = (g_1(t,x),\cdots,g_p(t,x))$ 是从 $[0,\infty)\times\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^p$ 的 C^2 映射, 那么过程

$$Y(t,\omega)=g(t,X(t))$$

也是一个 Itô 过程, 它的分量 Y_k 由下式给出:

$$dY_k=\frac{\partial g_k}{\partial t}(t,X)dt+\sum_i\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t,X)dx_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i\partial x_j}(t,X)dX_idX_j,$$

这里 $dB_idB_j=\delta_{ij}dt, dB_idt=dtdB_i=0$, 证明过程类似于 1 维情形 (定理 4.1.2), 在此省略.

例 4.2.2　设 $B=(B_1,\cdots,B_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的布朗运动, $n\geqslant 2$. 考虑 $R(t,\omega)=|B(t,\omega)|=(B_1^2(t,\omega)+\cdots+B_n^2(t,\omega))^{\frac{1}{2}}$, 即 $B(t,\omega)$ 到原点的距离. 函数 $g(t,x)=|x|$ 在原点不是 C^2 的. 但是由于 B_t 当 $n\geqslant 2$ 时几乎必然地不会碰到原点 (见练习 9.7), Itô 公式仍然可用, 因此有

$$dR=\sum_{i=1}^n\frac{B_idB_i}{R}+\frac{n-1}{2R}dt,$$

由于它的生成元是 Bessel 微分算子 $Af(x)=\frac{1}{2}f''(x)+\frac{n-1}{2x}f'(x)$, 见例 8.4.1, 因此称 R 为 n 维 Bessel 过程.

4.3　鞅表示定理

设 $B(t)=(B_1(t),\cdots,B_n(t))$ 是 n 维布朗运动, 在第 3 章 (推论 3.2.6) 证明了如果 $v\in\mathcal{V}^n$, 那么 Itô 积分

$$X_t=X_0+\int_0^t v(s,\omega)dB(s),\quad t\geqslant 0$$

总是关于流 $\mathcal{F}_t^{(n)}$(及概率测度 P) 为鞅. 在本节将证明它的逆命题也成立. 任何 $\mathcal{F}_t^{(n)}$ 鞅 (关于 P) 能被表示成 Itô 积分 (定理 4.3.4). 这个结果称为鞅表示定理, 它有许多重要的应用, 例如在数理金融中 (见第 12 章). 在这里只简单地证明 $n=1$ 的情形, 但读者能对任意的 n 容易地给出本质上相同的证明.

首先建立一些辅助结果.

引理 4.3.1　固定 $T>0$, 随机变量的集合:

$$\{\phi(B_{t_1},\cdots,B_{t_n});t_i\in[0,T],\ \phi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n),\ n=1,2,\cdots\}$$

在 $L^2(\mathcal{F}_T,P)$ 中是稠密的.

证明　设 $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ 是 $[0,t]$ 的稠子集, 对每个 $n=1,2,\cdots$, 设 $\mathcal{H}_n$ 是由 $B_{t_1}(\cdot),\cdots,B_{t_n}(\cdot)$ 生成的 σ 代数. 显然 $\mathcal{H}_n\subset\mathcal{H}_{n+1}$. $\mathcal{F}_T$ 是包含所有的 $\mathcal{H}_n$ 的最小的 σ 代数.

任选 $g\in L^2(\mathcal{F}_T,P)$, 那么由鞅收敛定理的推论 C.9(附录 C), 有

$$g = E[g|\mathcal{F}_T] = \lim_{n\to\infty} E[g|\mathcal{H}_n].$$

上述极限是按 (P) 几乎处处收敛的极限且属于 $L^2(\mathcal{F}_T, P)$. 由 Doob-Dynkin 引理 (引理 2.1.2), 对每个 n, 可写成下列形式:

$$E[g|\mathcal{H}_n] = g_n(B_{t_1}, \cdots, B_{t_n}),$$

其中 g_n 为 $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 上的某个 Borel 可测函数, 每个 $g_n(B_{t_1}, \cdots, B_{t_n})$ 能被 $L^2(\mathcal{F}_T, P)$ 中的函数 $\phi_n(B_{t_1}, \cdots, B_{t_n})$ 近似, 且 $\phi_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, 由此得到结论.

而下一个结果的另一种证明方法见练习 4.17.

引理 4.3.2 具有如下形式:

$$\exp\left\{\int_0^T h(t)dB_t(\omega) - \frac{1}{2}\int_0^T h^2(t)dt\right\}, \quad h \in L^2[0,T](\text{确定性的}) \tag{4.3.1}$$

的随机变量的线性组合之全体在 $L^2(\mathcal{F}_T, P)$ 中是稠密的.

证明 假定 $g \in L^2(\mathcal{F}_T, P)$, 与所有形如 (4.3.1) 中的函数正交 (在 $L^2(\mathcal{F}_T, P)$ 中). 特别对所有的 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ 和所有的 $t_1, \cdots, t_n \in [0, T]$ 有

$$G(\lambda) := \int_\Omega \exp\{\lambda_1 B_{t_1}(\omega) + \cdots + \lambda_n B_{t_n}(\omega)\} g(\omega) dP(\omega) = 0, \tag{4.3.2}$$

显然 $G(\lambda)$ 对 $\lambda \in \mathbf{R}^n$ 是实解析的, 因此 $G(\lambda)$ 可解析延拓到复空间 $\mathbf{C}^n$, 且对 $\forall\ z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ 有

$$G(z) = \int_\Omega \exp\{z_1 B_{t_1}(\omega) + \cdots + z_n B_{t_n}(\omega)\} g(\omega) dP(\omega) \tag{4.3.3}$$

(见练习 2.8b). 因为在 $\mathbf{R}^n$ 中 $G = 0$, 且 G 是解析的, 因此在 $\mathbf{C}^n$ 中也有 $G = 0$, 特别, $G(iy_1, iy_2, \cdots, iy_n) = 0$, 对所有的 $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ 成立. 但对 $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ 有

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \phi(B_{t_1}, \cdots, B_{t_n}) g(\omega) dP(\omega) \\
&= \int_\Omega (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \Big(\int_{\mathbf{R}^n} \hat{\phi}(y) e^{i(y_1 B_{t_1} + \cdots + y_n B_{t_n})} dy\Big) g(\omega) dP(\omega) \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} \hat{\phi}(y) \Big(\int_\Omega e^{i(y_1 B_{t_1} + \cdots + y_n B_{t_n})} g(\omega) dP(\omega)\Big) dy \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} \hat{\phi}(y) G(iy) dy = 0,
\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

这里

$$\hat{\phi}(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} \phi(x) e^{-ix\cdot y} dx$$

是 ϕ 的 Fourier 变换, 上面利用了 Fourier 逆变换定理 (Folland, 1984)

$$\phi(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} \hat{\phi}(y) e^{ix\cdot y} dy.$$

由 (4.3.4) 式和引理 4.3.1 可知, g 与 $L^2(\mathcal{F}_T, P)$ 的一个稠子集正交. 因此 $g = 0$. 由此可得出形如 (4.3.1) 的函数的线性扩张一定在 $L^2(\mathcal{F}_T, P)$ 中是稠密的.

假设 $B(t) = (B_1(t), \cdots, B_n(t))$ 是 n 维布朗运动, 如果 $v(s,\omega) \in \mathcal{V}^n[0,T]$, 那么随机变量

$$V(\omega) = \int_0^T v(t,\omega) dB(t) \tag{4.3.5}$$

是 $\mathcal{F}_T^{(n)}$ 可测的, 且由 Itô 等距有

$$E[V^2] = \int_0^T E[v^2(t,\cdot)]dt < \infty,$$

因此 $V \in L^2(\mathcal{F}_T^{(n)}, P)$.

下面的结果表明任意的 $F \in L^2(\mathcal{F}_T^{(n)}, P)$ 都有这种表示.

定理 4.3.3(Itô 表示定理)　设 $F \in L^2(\mathcal{F}_T^{(n)}, P)$, 则存在唯一的一个随机过程 $f(t,\omega) \in \mathcal{V}^n(0,T)$ 使得

$$F(\omega) = E[F] + \int_0^T f(t,\omega) dB(t). \tag{4.3.6}$$

证明　只考虑 $n = 1$ 的情形 (一般情形下的证明类似), 首先假定 F 有形式 (4.3.1), 即存在某个 $h(t) \in L^2[0,T]$, 使

$$F(\omega) = \exp\left\{ \int_0^T h(t) dB_t(\omega) - \frac{1}{2}\int_0^T h^2(t)dt \right\}.$$

定义

$$Y_t(\omega) = \exp\left\{ \int_0^t h(s) dB_s(\omega) - \frac{1}{2}\int_0^t h^2(s)ds \right\}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

则由 Itô 公式有

$$dY_t = Y_t(h(t)dB_t - \frac{1}{2}h^2(t)dt) + \frac{1}{2}Y_t(h(t)dB_t)^2 = Y_t h(t) dB_t,$$

因此

$$Y_t = 1 + \int_0^t Y_s h(s) dB_s, \quad t \in [0,T].$$

于是

$$F = Y_T = 1 + \int_0^T Y_s h(s) dB_s,$$

因此 $E(F)=1$. 在此时 (4.3.6) 成立. 如果 $F\in L^2(\mathcal{F}_T,P)$ 是任意的, 由引理 4.3.2 可知, 在 $L^2(\mathcal{F}_T,P)$ 中存在形如 (4.3.1) 的函数的线性组合 F_n, 它在 $L^2(\mathcal{F}_T,P)$ 中逼近 F. 由于 (4.3.6) 式具有线性性, 因此由前面的证明可知, 对形如 (4.3.1) 的函数的线性组合所得的函数也满足 (4.3.6) 式, 故此对每个 n,

$$F_n(\omega)=E[F_n]+\int_0^T f_n(s,\omega)dB_s(\omega),$$

这里 $f_n\in\mathcal{V}(0,T)$. 因 F_n 在 $L^2(\mathcal{F}_T,P)$ 中逼近 F, 故当 $n,m\to\infty$ 时, 有 $E[(F_n-F_m)^2]\to 0$, 由 Itô 等距, 又有

$$\begin{aligned}E[(F_n-F_m)^2]&=E\Big[(E[F_n-F_m]+\int_0^T(f_n-f_m)dB)^2\Big]\\&=(E[F_n-F_m])^2+\int_0^T E[(f_n-f_m)^2]dt,\end{aligned}$$

因此, 当 $n,m\to\infty$ 时有

$$\int_0^T E[(f_n-f_m)^2]dt\to 0,$$

故 $\{f_n\}$ 是 $L^2([0,T]\times\Omega)$ 上的 Cauchy 序列, 它收敛到某个函数 $f\in L^2([0,T]\times\Omega)$, 由于 $f_n\in\mathcal{V}(0,T)$ 有 $f\in\mathcal{V}(0,T)$(因为有 $\{f_n(t,\omega)\}$ 的某个子列对几乎所有的 $(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega$ 收敛于 $f(t,\omega)$, 因此 $f(t,\cdot)$ 对几乎所有的 t 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的. 故在某个 t 零测度集中对 $f(t,\omega)$ 进行修正就可使得 $f(t,\omega)$ 是 $\mathcal{F}_t$ 适应的). 再利用 Itô 等距, 有

$$F=\lim_{n\to\infty}F_n=\lim_{n\to\infty}\Big(E[F_n]+\int_0^T f_n dB\Big)=E[f]+\int_0^T f dB,$$

上述极限是在 $L^2(\mathcal{F}_T,P)$ 中的极限意义下取得的, 故此 (4.3.6) 对所有的 $F\in L^2(\mathcal{F}_T, P)$ 成立.

唯一性由下面的 Itô 等距得出. 假如

$$F(\omega)=E[F]+\int_0^T f_1(t,\omega)dB_t(\omega)=E[F]+\int_0^T f_2(t,\omega)dB_t(\omega),$$

其中 $f_1,f_2\in\mathcal{V}(0,T)$. 则

$$0=E\Big[\Big(\int_0^T(f_1(t,\omega)-f_2(t,\omega))dB_t(\omega)\Big)^2\Big]=\int_0^T E[(f_1(t,\omega)-f_2(t,\omega))^2]dt,$$

因此, $f_1(t,\omega)=f_2(t,\omega)$ 对几乎所有的 $(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega$ 成立.

附注 过程 $f(t,\omega)$ 可看成 $F(\omega)$ 的 Frechét 导数, 也可看成 $F(\omega)$ 的 Malliavin 导数 (Clark, 1970/71; Davis, 1980; Ocone, 1984).

定理 4.3.4(鞅表示定理) 设 $B(t)=(B_1(t),\cdots,B_n(t))$ 是 n 维布朗运动. M_t 是一个 $\mathcal{F}_t^{(n)}$ 鞅 (关于 P), 且对所有的 $t\geqslant 0$ 有 $M_t\in L^2(P)$. 则存在唯一的一个随机过程 $g(s,\omega)$, 使得对所有的 $t\geqslant 0$, $g\in\mathcal{V}^{(n)}(0,t)$, 且有

$$M_t(\omega)=E[M_0]+\int_0^t g(s,\omega)dB(s),\ \text{a.s. 对任意的 } t\geqslant 0.$$

证明 $n=1$. 定理 4.3.3 应用于 $T=t$ 及 $F=M_t$, 对任意给定的 t, 存在唯一的 $f^{(t)}(s,\omega)\in L^2(\mathcal{F}_t,P)$ 使得

$$M_t(\omega)=E[M_t]+\int_0^t f^{(t)}(s,\omega)dB_s(\omega)=E[M_0]+\int_0^t f^{(t)}(s,\omega)dB_s(\omega).$$

现在假定 $0\leqslant t_1\leqslant t_2$, 则有

$$\begin{aligned}M_{t_1}&=E[M_{t_2}|\mathcal{F}_{t_1}]=E[M_0]+E\Big[\int_0^{t_2} f^{(t_2)}(s,\omega)dB_s(\omega)|\mathcal{F}_{t_1}\Big]\\&=E[M_0]+\int_0^{t_1} f^{(t_2)}(s,\omega)dB_s(\omega),\end{aligned}\tag{4.3.7}$$

但是又有

$$M_{t_1}=E[M_0]+\int_0^{t_1} f^{(t_1)}(s,\omega)dB_s(\omega),\tag{4.3.8}$$

因此, 比较 (4.3.7) 和 (4.3.8) 可得到

$$0=E\Big[\Big(\int_0^{t_1}(f^{(t_2)}-f^{(t_1)})dB\Big)^2\Big]=\int_0^{t_1}E[(f^{(t_2)}-f^{(t_1)})^2]ds,$$

故有

$$f^{(t_1)}(s,\omega)=f^{(t_2)}(s,\omega)$$

对几乎所有的 $(s,\omega)\in[0,t_1]\times\Omega$ 成立. 于是对几乎所有的 $(s,\omega)\in[0,\infty)\times\Omega$, 定义 $f(s,\omega)$, 当 $s\in[0,N]$ 时,

$$f(s,\omega)=f^{(N)}(s,\omega).$$

由此有

$$M_t=E[M_0]+\int_0^t f^{(t)}(s,\omega)dB_s(\omega)=E[M_0]+\int_0^t f(s,\omega)dB_s(\omega),\quad \forall\, t\geqslant 0.$$

练　　习

4.1.* 利用 Itô 公式, 选择合适的 $u\in\mathbf{R}^n, v\in\mathbf{R}^{n\times m}$ 及维数 n 和 m, 把下面的随机过程 Y_t 写成标准形式:

$$dY_t=u(t,\omega)dt+v(t,\omega)dB_t.$$

a) $Y_t=B_t^2$, 这里 B_t 为 1 维的.

b) $Y_t = 2 + t + e^{B_t}$ (B_t 是 1 维的).

c) $Y_t = B_1^2(t) + B_2^2(t)$, 这里 (B_1, B_2) 是 2 维的.

d) $Y_t = (t_0 + t, B_t)$(B_t 是 1 维的).

e) $Y_t = (B_1(t) + B_2(t) + B_3(t), B_2^2(t) - B_1(t)B_3(t))$, 这里 (B_1, B_2, B_3) 是 3 维的.

4.2.* 利用 Itô 公式证明

$$\int_0^t B_s^2 dB_s = \frac{1}{3}B_t^3 - \int_0^t B_s ds.$$

4.3.* 设 X_t, Y_t 是 $\mathbf{R}$ 内的 Itô 过程, 证明:

$$d(X_tY_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t \cdot dY_t,$$

且推导下面一般的分部积分公式:

$$\int_0^t X_s dY_s = X_tY_t - X_0Y_0 - \int_0^t Y_s dX_s - \int_0^t dX_s \cdot dY_s.$$

4.4. (指数鞅) 假定 $\theta(t,\omega) = (\theta_1(t,\omega), \cdots, \theta_n(t,\omega)) \in \mathbf{R}^n$, 其中 $\theta_k(t,\omega) \in \mathcal{V}[0,T]$, 任意的 $k = 1, 2 \cdots, n$, 这里 $T \leqslant \infty$. 定义

$$Z_t = \exp\left\{\int_0^t \theta(s,\omega)dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s,\omega)ds\right\}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

这里 $B(s) \in \mathbf{R}^n, \theta^2 = \theta \cdot \theta$(点积).

a) 利用 Itô 公式证明

$$dZ_t = Z_t\theta(t,\omega)dB(t).$$

b) 假定

$$Z_t\theta_k(t,\omega) \in \mathcal{V}[0,T], \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

证明 Z_t 是一个鞅.

附注　Z_t 是一个鞅的一个充分条件是 Kazamaki 条件, 即

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \theta(s,\omega)dB(s)\right)\right] < \infty, \quad \forall\, t \leqslant T. \tag{4.3.9}$$

而这个条件可由下面的 (强)Novikov 条件

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \theta^2(s,\omega)ds\right)\right] < \infty \tag{4.3.10}$$

推出. 见文献 (Ikeda, Watanabe, 1989, 第 3 章第 5 节), 也可见本书 8.6 节.

4.5.* 设 $B_t \in \mathbf{R}$, $B_0 = 0$, 定义

$$\beta_k(t) = E[B_t^k], \quad k = 0, 1, 2, \cdots, t \geqslant 0,$$

利用 Itô 公式证明:

$$\beta_k(t) = \frac{1}{2}k(k-1)\int_0^t \beta_{k-2}(s)ds, \quad k \geqslant 2.$$

a) 推导 (见 (2.2.14))

$$E[B_t^4] = 3t^2$$

且求

$$E[B_t^6].$$

b) 证明

$$E[B(t)^{2k+1}] = 0$$

且

$$E[B(t)^{2k}] = \frac{(2k)!t^k}{2^k k!}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

(与练习 2.8 进行比较).

4.6. a) 设 c, α 为常数, $B_t \in \mathbf{R}$, 定义

$$X_t = e^{ct+\alpha B_t},$$

证明

$$dX_t = \left(c + \frac{1}{2}\alpha^2\right) X_t dt + \alpha X_t dB_t.$$

b) 对 $c, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为常数, $B_t = (B_1(t), \cdots, B_n(t)) \in \mathbf{R}^n$, 定义

$$X_t = \exp\left(ct + \sum_{j=1}^n \alpha_j B_j(t)\right),$$

证明

$$dX_t = \left(c + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \alpha_j^2\right) X_t dt + X_t \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j dB_j\right).$$

4.7. 设 X_t 是一个 Itô 积分

$$dX_t = v(t,\omega) dB_t(\omega), \quad v \in \mathcal{V}^n(0,T),\ B_t \in \mathbf{R}^n,\ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

a) 举例说明 X_t^2 不是一个鞅.

b) 证明: 如果 v 是有界的, 则有

$$M_t := X_t^2 - \int_0^t |v_s|^2 ds$$

是一个鞅. 过程 $\langle X, X\rangle_t := \int_0^t |v_s|^2 ds$ 称为鞅 X_t 的平方变差过程. 对一般的过程 X_t, 它定义为

$$\langle X, X\rangle_t = \lim_{\Delta t_k \to 0} \sum_{t_k \leqslant t} |X_{t_{k+1}} - X_{t_k}|^2 \tag{4.3.11}$$

(在概率意义下的极限), 这里 $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_n = t$, $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, 对于连续平方可积鞅 X_t, 上述极限证明是存在的 (Karatzas, Shreve, 1991).

4.8. a) 设 B_t 表示 n 维布朗运动, $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 是 C^2 函数, 利用 Itô 公式证明:

$$f(B_t)=f(B_0)+\int_0^t \nabla f(B_s)dB_s+\frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(B_s)ds,$$

这里 $\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 是 Laplace 算子.

b) 假定 $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是处处 C^1 的函数, 在除开有限多个点 $Z_1,\cdots,Z_N$ 外是 C^2 的函数, 且当 $x\notin\{Z_1,\cdots,Z_n\}$ 时, 有 $|g''(x)|\leqslant M$, B_t 是 1 维的布朗运动. 证明 a) 的 1 维修正仍然成立, 即

$$g(B_t)=g(B_0)+\int_0^t g'(B_s)dB_s+\frac{1}{2}\int_0^t g''(B_s)ds.$$

提示: 选择 $f_k\in C^2(\mathbf{R})$ 使得 f_k 一致收敛于 g, f_k' 一致地收敛于 g', 且 $|f_k''|\leqslant M$, $f_k''\to g''$(除开 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$). 把 f_k 应用到 a) 上且令 $k\to\infty$.

4.9. 证明在 Itô公式 (定理 4.1.2) 的证明中, 通过下面的过程可假定 g 和它的两个一阶偏导是有界的, 对固定的 $t\geqslant 0$ 及 $n=1,2,\cdots$, 选择 g_n 满足上面的条件且使得 $g_n(s,x)=g(s,x)$ 对任意的 $s\leqslant t$ 及任意的 $|x|\leqslant n$ 均成立. 假定已证明了对每个 g_n, (4.1.9) 成立. 则可定义随机时间

$$\tau_n=\tau_n(\omega)=\inf\{s>0;\ |X_s(\omega)|\geqslant n\}$$

(τ_n 称作停时, 见第 7 章). 证明: 对每个 n, 有

$$\left(\int_0^t v\frac{\partial g_n}{\partial x}(s,X_s)\chi_{s\leqslant\tau_n}dB_s:=\right)$$

$$\int_0^{t\wedge\tau_n} v\frac{\partial g_n}{\partial x}(s,X_s)dB_s=\int_0^{t\wedge\tau_n} v\frac{\partial g}{\partial x}(s,X_s)dB_s,$$

这样得出

$$\begin{aligned}&g(t\wedge\tau_n,X_{t\wedge\tau_n})\\&=g(0,X_0)+\int_0^{t\wedge\tau_n}\left(\frac{\partial g}{\partial s}+u\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{1}{2}v^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)ds+\int_0^{t\wedge\tau_n} v\frac{\partial g}{\partial x}dB_s.\end{aligned}$$

又因为当 $n\to\infty$ 时, 有

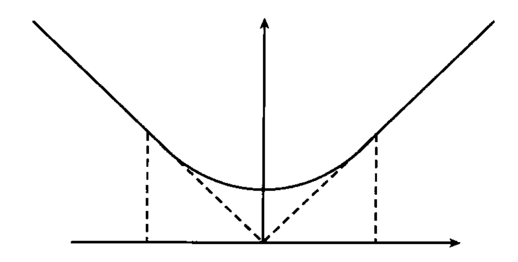
$$P[\tau_n>t]\to 1,$$

可得出对 g, (4.1.9) 几乎必然地成立.

4.10. (Tanaka 公式和局部时) 设 B_t 为 1 维布朗运动, $g(x)=|x|$, 当应用 Itô 公式于 $g(B_t)$ 时会有什么发生呢? 在这种情形, g 在 $x=0$ 时不是 C^2 的, 因此在 $x=0$ 附近把 $g(x)$ 修正为 $g_\varepsilon(x)$ 如下:

$$g_\varepsilon(x)=\begin{cases}|x|, & \text{如果 } |x|\geqslant\varepsilon;\\ \dfrac{1}{2}\left(\varepsilon+\dfrac{x^2}{\varepsilon}\right), & \text{如果 } |x|<\varepsilon,\end{cases}$$

这里 $\varepsilon>0$.



a) 应用练习 4.8 b) 证明

$$g_\varepsilon(B_t) = g_\varepsilon(B_0) + \int_0^t g_\varepsilon'(B_s)dB_s + \frac{1}{2\varepsilon} \cdot |\{s \in [0,t];\ B_s \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}|,$$

这里 $|F|$ 表示集合 F 的 Lebesgue 测度.

b) 证明：当 $\varepsilon \to 0$ 时, 在 $L^2(P)$ 中有

$$\int_0^t g_\varepsilon'(B_s) \cdot \mathcal{X}_{B_s \in (-\varepsilon,\varepsilon)} dB_s = \int_0^t \frac{B_s}{\varepsilon} \cdot \mathcal{X}_{B_s \in (-\varepsilon,\varepsilon)} dB_s \to 0.$$

提示：应用 Itô 等距于下式

$$E\Big[\Big(\int_0^t \frac{B_s}{\varepsilon} \cdot \mathcal{X}_{B_s \in (-\varepsilon,\varepsilon)} dB_s\Big)^2\Big].$$

c) 令 $\varepsilon \to 0$, 证明

$$|B_t| = |B_0| + \int_0^t \operatorname{sign}(B_s)dB_s + L_t(\omega), \tag{4.3.12}$$

这里

$$L_t = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \cdot |\{s \in [0,t];\ B_s \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}|.$$

($L^2(P)$ 中的极限定义下)

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1, & x \leqslant 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

L_t 称为布朗运动在 0 点的局部时, (4.3.12) 称为 (布朗运动的)Tabaka 公式 (Regers, Williams, 1987).

4.11.* 利用 Itô 公式 (如练习 4.3 的形式), 证明下列随机过程是 $\{\mathcal{F}_t\}$ 鞅:

a) $X_t = e^{\frac{1}{2}t}\cos B_t, \quad B_t \in \mathbf{R}$;

b) $X_t = e^{\frac{1}{2}t}\sin B_t, \quad B_t \in \mathbf{R}$;

c) $X_t = (B_t + t)\exp\left(-B_t - \dfrac{1}{2}t\right), \quad B_t \in \mathbf{R}$.

4.12. 设 $dX_t = u(t,\omega)dt + v(t,\omega)dB_t$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个 Itô 过程, 且满足

$$E\Big[\int_0^t |u(r,\omega)|dr\Big] + E\Big[\int_0^t |vv^T(r,\omega)|dr\Big] < \infty, \quad \forall\, t \geqslant 0.$$

假设 X_t 是一个 $\{\mathcal{F}_t^{(n)}\}$ 鞅, 证明

$$u(s,\omega) = 0, \quad 对几乎所有的\ (s,\omega) \in [0,\infty) \times \Omega. \tag{4.3.13}$$

附注　1) 这个结果可看作鞅表示定理的特殊情形.

2) 如果流 $\mathcal{F}_t^{(n)}$ 被 $X_s(\cdot), s \leqslant t$ 所生成的 σ 代数 $\mathcal{M}_t$ 替代, 即如果仅假定 X_t 是关于它自己的流为鞅, 则结论 (4.3.13) 不再成立, 见第 8 章中布朗运动的特征.

提示: 如果 X_t 是一个 $\mathcal{F}_t^{(n)}$ 鞅, 则可推出

$$E\Big[\int_t^s u(r,\omega)dr|\mathcal{F}_t^{(n)}\Big] = 0, \quad \forall\, s \geqslant t.$$

对 s 求导得到对几乎所有的 $s > t$ 有

$$E[u(s,\omega)|\mathcal{F}_t^{(n)}] = 0, \text{ a.s.}$$

然后令 $t \uparrow s$, 再应用推论 C.9.

4.13. 设 $dX_t = u(t,\omega)dt + dB_t$, $u \in \mathbf{R}$, $B_t \in \mathbf{R}$ 是一个 Itô 过程, 为简单起见, 设 u 是有界的, 则从练习 4.12 知除非 $u = 0$, 否则过程 X_t 不是 $\mathcal{F}_t$ 鞅. 然而通过对 X_t 乘以一个合适的指数鞅可构造一个 F_t 鞅. 更简单地, 定义

$$Y_t = X_t M_t,$$

这里

$$M_t = \exp\Big(-\int_0^t u(r,\omega)dB_r - \frac{1}{2}\int_0^t u^2(r,\omega)dr\Big).$$

利用 Itô 公式证明: Y_t 是 $\mathcal{F}_t$ 鞅.

附注　a) 与练习 4.11 c) 进行比较.

b) 这个结果是重要的 Girsanov 定理的特殊情形, 它可解释如下: $\{X_t\}_{t\leqslant T}$ 关于定义于 $\mathcal{F}_T$ 上的测度 Q 为鞅, 其中

$$dQ = M_T dP, \quad T < \infty.$$

见 8.6 节.

4.14.* 在下面的每种情形下, 求过程 $f(t,\omega) \in \mathcal{V}[0,T]$, 使得 (4.3.6) 成立, 即

$$F(\omega) = E[F] + \int_0^T f(t,\omega)dB_t(\omega).$$

a) $F(\omega) = B_T(\omega)$.

b) $F(\omega) = \int_0^T B_T(\omega)dt$.

c) $F(\omega) = B_T^2(\omega)$.

d) $F(\omega) = B_T^3(\omega)$.

e) $F(\omega) = e^{B_T(\omega)}$.

f) $F(\omega) = \sin B_T(\omega)$.

4.15. 设 $x > 0$ 为一个常数, 定义

$$X_t = \Big(x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}B_t\Big)^3, \quad t \geqslant 0.$$

证明

$$dX_t = \frac{1}{3}X_t^{\frac{1}{3}}dt + X_t^{\frac{2}{3}}dB_t, \quad X_0 = x.$$

4.16. 由练习 3.8 知道, 如果 Y 是一个 $\mathcal{F}_T$ 可测随机变量使得 $E[|Y|^2] < \infty$, 则过程

$$M_t := E[Y|\mathcal{F}_t], \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

是关于 $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 的鞅.

a) 证明 $E[M_t^2] < \infty$, 对任意的 $t \in [0,T]$. 提示: 利用练习 3.16.

b) 由鞅表示定理 (定理 4.3.4), 存在一个唯一的过程 $g(t,\omega) \in \mathcal{V}(0,T)$ 使得

$$M_t = E[M_0] + \int_0^t g(s,\omega)dB(s), \quad t \in [0,T].$$

在下面情形中求 g:

(i) $Y(\omega) = B^2(T)$.

(ii) $Y(\omega) = B^3(T)$.

(iii) $Y(\omega) = \exp(\sigma B(T))$, $\sigma \in \mathbf{R}$ 是常数. 提示: 利用 $\exp\left(\sigma B(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$ 是一个鞅.

4.17. 这里是定理 4.3.3 的另一个证明, 特别, 这里没有用到引理 4.3.2 中的复分析方法. 证明的思想来源于 Davis(1980) 推广 Clark 表示公式的证明方法 (见定理 4.3.4 之前的附注), 由引理 4.3.1, 它只需证明下面的问题: 设 $Y = \phi(B_{t_1}, \cdots, B_{t_n})$, 这里 $0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqslant T, \phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. 要证明存在 $f(t,\omega) \in \mathcal{V}(0,T)$ 使得

$$Y = E[Y] + \int_0^T f(t)dB(t). \tag{4.3.14}$$

a) 利用 Itô 公式证明: 如果 $w = w(t, x_1, \cdots, x_k): [t_{k-1}, t_k] \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ 关于 t 为一阶连续可微, 关于 x_k 为二阶连续可微的, 那么对 $t \in [t_{k-1}, t_k]$, 有

$$\begin{aligned}
&w(t, B(t_1), \cdots, B(t_{k-1}), B(t)) \\
=&w(t_{k-1}, B(t_1), \cdots, B(t_{k-1}), B(t_{k-1})) \\
&+\int_{t_{k-1}}^t \frac{\partial w}{\partial x_k}(s, B(t_1), \cdots, B(t_{k-1}), B(s))dB(s) \\
&+\int_{t_{k-1}}^t \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2}\right)(s, B(t_1), \cdots, B(t_{k-1}), B(s))ds;
\end{aligned}$$

b) 对 $k = 1, 2, \cdots, n$, 函数 $v_k: [t_{k-1}, t_k] \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ 的定义由下面式子归纳地导出:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_n}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 v_n}{\partial x_n^2} = 0, \quad t_{n-1} < t < t_n; \\ v_n(t_n, x_1, \cdots, x_n) = \phi(x_1, \cdots, x_n), \end{cases} \tag{4.3.15}$$

对 $k = n-1, n-2, \cdots, 1$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_k}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 v_k}{\partial x_k^2} = 0, \quad t_{k-1} < t < t_k; \\ v_k(t_k, x_1, \cdots, x_k) = v_{k+1}(t_k, x_1, \cdots, x_k, x_k), \end{cases} \tag{4.3.16}$$

证明：对 $t \in [t_{k-1}, t_k]$, (4.3.16) 的解是

$$
\begin{aligned}
& v_k(t, x_1, \cdots, x_k) \qquad (4.3.17)\\
&= (2\pi(t_k - t))^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbf{R}} v_{k+1}(t_k, x_1, \cdots, x_k, y) \exp\Big(-\frac{(x_k - y)^2}{2(t_k - t)}\Big) dy \\
&(= E[v_{k+1}(t_k, x_1, \cdots, x_k, B^{(x_k)}_{t_k - t})](\text{与定理 } 8.1.1 \text{ 进行比较})).
\end{aligned}
$$

特别 $w = v_k$ 满足 a) 的光滑性条件.

c) 证明表示式 (4.3.14) 中, 对 $t \in [t_{k-1}, t_k]$, 有

$$
f(t, \omega) = \frac{\partial v_k}{\partial x_k}(t, B(t_1), \cdots, B(t_{k-1}), B(t)).
$$

提示：由 (4.3.15) 和 a) 有

$$
\begin{aligned}
&\phi(B(t_1), \cdots, B(t_n)) = v_n(t_n, B(t_1), \cdots, B(t_n)) \\
&= v_n(t_{n-1}, B(t_1), \cdots, B(t_{n-1}), B(t_{n-1})) \\
&\quad + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{\partial v_n}{\partial x_n}(s, B(t_1), \cdots, B(t_{n-1}), B(s)) dB(s) \\
&= v_{n-1}(t_{n-1}, B(t_1), \cdots, B(t_{n-1})) \\
&\quad + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{\partial v_n}{\partial x_n}(s, B(t_1), \cdots, B(t_{n-1}), B(s)) dB(s).
\end{aligned}
$$

对 $v_{n-1}(t_{n-1}, B(t_1), \cdots, B(t_{n-1}))$ 重做上面的步骤并归纳得出.

第 5 章　随机微分方程

5.1　例子和某些求解方法

现在回到随机微分方程

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)W_t; \quad b(t, x) \in \mathbf{R},\ \sigma(t, x) \in \ \mathbf{R} \tag{5.1.1}$$

的可能的解 $X_t(\omega)$ 的问题. 这里 W_t 是 1 维的“白噪声”, 像第 3 章讨论的那样, (5.1.1) 的 Itô 解释是 X_t 满足随机积分方程

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(t, X_s)dB_s,$$

或微分形式

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \tag{5.1.2}$$

因此由 (5.1.1) 得到 (5.1.2), 从形式上看是把 (5.1.1) 中的白噪声 W_t 用 $\dfrac{dB_t}{dt}$ 取代, 然后再在 (5.1.1) 的两边乘以 dt, 就得到了 (5.1.2) 式. 很自然地会问:

(A) 对这样的方程, 能得到解的存在和唯一性定理吗? 解有什么样的性质?

(B) 对给定的这样的方程, 如何求解?

首先将通过某些简单的例子考虑问题 (B), 然后在 5.2 节再讨论 (A).

许多随机微分方程的解的关键是 Itô 公式. 通过下面的例子来说明该方法.

例 5.1.1　回到第 1 章的人口增长模型:

$$\frac{dN_t}{dt} = a_tN_t, \quad N_0 \text{ 给定},$$

这里 $a_t = r_t + \alpha W_t$, W_t 为白噪声, α 为常数.

假定 $r_t = r =$ 常数, 由 Itô 解释 (5.1.2), 这个方程等价于 (这里 $\sigma(t, x) = \alpha x$)

$$dN_t = rN_tdt + \alpha N_tdB_t, \tag{5.1.3}$$

或

$$\frac{dN_t}{N_t} = rdt + \alpha dB_t,$$

因此

$$\int_0^t \frac{dN_s}{N_s} = rt + \alpha B_t, \quad B_0 = 0. \tag{5.1.4}$$

为了计算上式左边的积分, 对函数 $g(t,x)=\ln x,\ x>0$, 应用 Itô 公式, 得到

$$\begin{aligned}d(\ln N_t)&=\frac{1}{N_t}\cdot dN_t+\frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{N_t^2}\Big)(dN_t)^2\\&=\frac{dN_t}{N_t}-\frac{1}{2N_t^2}\cdot\alpha^2N_t^2dt=\frac{dN_t}{N_t}-\frac{1}{2}\alpha^2dt,\end{aligned}$$

因此

$$\frac{dN_t}{N_t}=d(\ln N_t)+\frac{1}{2}\alpha^2dt,$$

故从 (5.1.4) 得到

$$\ln\frac{N_t}{N_0}=\left(r-\frac{1}{2}\alpha^2\right)t+\alpha B_t,$$

或

$$N_t=N_0\exp\left(\left(r-\frac{1}{2}\alpha^2\right)t+\alpha B_t\right).\tag{5.1.5}$$

参考第 3 章最后的讨论, 比较 Stratonovich 解释. (5.1.3) 可看成

$$d\bar{N}_t=r\bar{N}_tdt+\alpha\bar{N}_t\circ dB_t,$$

将得到解

$$\bar{N}_t=N_0\exp(rt+\alpha B_t),\tag{5.1.6}$$

解 N_t 与 $\bar{N}_t$, 两者都是形如下式的过程

$$X_t=X_0\exp(\mu t+\alpha B_t),\quad \mu,\alpha\ \text{为常数},$$

这样的过程称为几何布朗运动. 它们在经济中的随机价格模型中相当重要, 见第 10~12 章.

附注 如果 B_t 与 N_0 独立, 则

$$E[N_t]=E[N_0]e^{rt}$$

似乎是合理的, 即与在 a_t 中没有白噪声时一样. 为了验证是否真的如此, 记

$$Y_t=e^{\alpha B_t}.$$

应用 Itô 公式

$$dY_t=\alpha e^{\alpha B_t}dB_t+\frac{1}{2}\alpha^2e^{\alpha B_t}dt,$$

或

$$Y_t=Y_0+\alpha\int_0^t e^{\alpha B_s}dB_s+\frac{1}{2}\alpha^2\int_0^t e^{\alpha B_s}ds,$$

因为 $E\Big[\int_0^t e^{\alpha B_s}dB_s\Big]=0$ (定理 3.2.1(c)), 有

$$E[Y_t] = E[Y_0] + \frac{1}{2}\alpha^2 \int_0^t E[Y_s]ds,$$

即

$$\frac{d}{dt}E[Y_t] = \frac{1}{2}\alpha^2 E[Y_t], \quad E[Y_0] = 1.$$

因此

$$E[Y_t] = e^{\frac{1}{2}\alpha^2 t}.$$

如所预测的那样, 可得到

$$E[N_t] = E[N_0]e^{rt}.$$

然而对 Stratonovich 解, 同样的计算可得到

$$E[\bar{N}_t] = E[N_0]e^{(r+\frac{1}{2}\alpha^2)t}.$$

现在, 在 (5.1.5) 和 (5.1.6) 中得到了显式解 N_t 与 $\bar{N}_t$, 利用关于 B_t 的知识可获得这些解的信息. 比如对 Itô 解 N_t, 有下面的信息:

(a) 如果 $r > \frac{1}{2}\alpha^2$, 那么当 $t \to \infty$ 时, 有 $N_t \to \infty$, a.s.

(b) 如果 $r < \frac{1}{2}\alpha^2$, 那么当 $t \to \infty$ 时, 有 $N_t \to 0$, a.s.

(c) 如果 $r = \frac{1}{2}\alpha^2$, 那么当 $t \to \infty$ 时, N_t 将在无穷大与无穷小之间波动, a.s.

这些结论可直接从 N_t 的公式 (5.1.5) 和下面关于 1 维的布朗运动 B_t 的基本结果得出.

定理 5.1.2(重对数律) $\limsup\limits_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}} = 1$, a.s.

它的证明可参考文献 (Lamperti, 1977).

对 Stratonovich 解 $\bar{N}_t$, 同样的讨论可知, 如果 $r < 0$, 则 $\bar{N}_t \to 0$, a.s.; 如果 $r > 0$, 则 $\bar{N}_t \to \infty$, a.s..

因此这两个解有本质上不同的性质, 那么到底哪个解是对具体问题的最好描述将是一个有趣的问题.

例 5.1.3 回到第 1 章问题 2 中的方程:

$$LQ_t'' + RQ_t' + \frac{1}{C}Q_t = F_t = G_t + \alpha W_t, \tag{5.1.7}$$

引进向量

$$X = X(t,\omega) = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_t \\ Q_t' \end{pmatrix},$$

得到

$$\begin{cases} X_1' = X_2, \\ LX_2' = -RX_2 - \frac{1}{C}X_1 + G + \alpha W_t, \end{cases} \tag{5.1.8}$$

或用矩阵概念有

$$dX = dX(t) = AX(t)dt + H(t)dt + KdB_t, \tag{5.1.9}$$

这里

$$dX = \begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix},$$

$$H(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L}G_t \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha}{L} \end{pmatrix}, \tag{5.1.10}$$

B_t 是一个 1 维布朗运动.

这样得到一个 2 维随机微分方程, 重写 (5.1.9) 为

$$\exp(-At)dX(t) - \exp(-At)AX(t)dt = \exp(-At)[H(t)dt + KdB_t], \tag{5.1.11}$$

这里对一般的 $n \times n$ 阶矩阵 F, 定义 $\exp(F)$ 表示如下 $n \times n$ 阶矩阵:

$$\exp(F) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}F^n,$$

这里尝试把 (5.1.11) 的左边看作

$$d(\exp(-At)X(t)).$$

为验证它, 只需利用 2 维的 Itô 公式即可 (定理 4.2.1).

应用上述结果于

$$g: \ [0,\infty) \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2: \ g(t, x_1, x_2) = \exp(-At)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

得到

$$d(\exp(-At)X(t)) = (-A)\exp(-At)X(t)dt + \exp(-At)dX(t).$$

把它代入到 (5.1.11) 得到

$$\exp(-At)X(t) - X(0) = \int_0^t \exp(-As)H(s)ds + \int_0^t \exp(-As)KdB(s),$$

或由定理 4.1.5 通过分部积分得到

$$X(t)=\exp(At)[X(0)+\exp(-At)KB_t+\int_0^t\exp(-As)[H(s)+AKB_s]ds]. \quad (5.1.12)$$

例 5.1.4 选择 $X_t=B_t$, 它为 1 维的布朗运动,

$$g(t,x)=e^{ix}=(\cos x,\sin x)\in\mathbf{R}^2,\quad \forall\, x\in\mathbf{R},$$

那么由 Itô 公式可得

$$Y(t)=g(t,X_t)=e^{iB_t}=(\cos B_t,\sin B_t),$$

又是一个 Itô 过程. 它的坐标分量, Y_1,Y_2 满足

$$dY_1(t)=-\sin(B_t)dB_t-\frac{1}{2}\cos(B_t)dt,$$

$$dY_2(t)=\cos(B_t)dB_t-\frac{1}{2}\sin(B_t)dt,$$

因此对过程 $Y=(Y_1,Y_2)$, 称之为单位圆上的布朗运动, 它是下面的随机微分方程组的解:

$$\begin{cases} dY_1(t)=-\frac{1}{2}Y_1dt-Y_2dB_t,\\ dY_2=-\frac{1}{2}Y_2dt+Y_1dB_t, \end{cases} \quad (5.1.13)$$

或用矩阵形式有

$$dY(t)=-\frac{1}{2}Y(t)dt+KY(t)dB_t,\quad 这里\ K=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

其他的例子和求解方法在本章的练习中可看到. 对 1 维的随机微分方程的归约方法的概括描述见文献 (Gard, 1988, 第 4 章).

5.2 存在唯一性

现在转向前面提到的存在和唯一性问题 (A).

定理 5.2.1(随机微分方程的存在唯一定理) 设 $T>0$, $b(\cdot,\cdot):[0,T]\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, $\sigma(\cdot,\cdot):[0,T]\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^{n\times m}$ 都是可测函数, 存在常数 C 与 D 使得

$$|b(t,x)|+|\sigma(t,x)|\leqslant C(1+|x|),\quad x\in\mathbf{R}^n,\ t\in[0,T], \quad (5.2.1)$$

$$|b(t,x)-b(t,y)|+|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|\leqslant D|x-y|,\quad x,y\in\mathbf{R}^n,\ t\in[0,T], \quad (5.2.2)$$

这里 $|\sigma|^2 = \sum |\sigma_{ij}|^2$. 设 Z 为随机变量且与 $B_s(\cdot)$, $s \geqslant 0$ 生成的 σ 代数 $\mathcal{F}_\infty^{(m)}$ 独立, 且有

$$E[|Z|^2] < \infty.$$

那么随机微分方程

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \ X_0 = Z \tag{5.2.3}$$

有一个唯一的 t 连续解 $X_t(\omega)$, 且

$$X_t(\omega) \text{ 关于 } Z \text{ 与 } B_s(\cdot), \quad s \leqslant t \text{ 生成的域流 } \mathcal{F}_t^Z \text{ 是适应的} \tag{5.2.4}$$

及有

$$E\Big[\int_0^T |X_t|^2 dt\Big] < \infty. \tag{5.2.5}$$

附注 通过下面两个简单的确定性微分方程的例子 (即 $\sigma = 0$) 可看出条件 (5.2.1) 和 (5.2.2) 是自然的.

a) 方程

$$\frac{dX_t}{dt} = X_t^2, \quad X_0 = 1 \tag{5.2.6}$$

相应的 $b(x) = x^2$(不满足条件 (5.2.1)), 它有 (唯一) 解

$$X_t = \frac{1}{1-t}, \quad 0 \leqslant t < 1.$$

在这种情况下, 它不可能找到一个整体解 (全局解) (对所有的 t 有定义). 更进一步地, 条件 (5.2.1) 确保 (5.2.3) 的解 $X_t(\omega)$ 不会爆炸, 即 $|X_t(\omega)|$ 在有限时间内不会趋于 ∞.

b) 方程

$$\frac{dX_t}{dt} = 3X_t^{2/3}, \quad X_0 = 0 \tag{5.2.7}$$

有多个解. 事实上, 对任何的 $a > 0$, 函数

$$X_t = \begin{cases} 0, & t \leqslant a; \\ (t-a)^3, & t > a \end{cases}$$

满足方程 (5.2.7). 在这种情形下, $b(x) = 3x^{\frac{2}{3}}$ 在 $x = 0$ 处不满足 Lipschitz 条件 (5.2.2). 因此, 条件 (5.2.2) 保证方程 (5.2.3) 有一个唯一解. 这里唯一意味着如果 $X_1(t, \omega)$ 和 $X_2(t, \omega)$ 是满足 (5.2.3),(5.2.4) 和 (5.2.5) 的两个 t 连续过程, 那么

$$X_1(t, \omega) = X_2(t, \omega), \quad \forall t \leqslant T, \ \text{a.s.} \tag{5.2.8}$$

定理 5.2.1 的证明 唯一性可由 Itô 等距 (推论 3.1.7) 及 Lipschitz 条件 (5.2.2) 推出. 设 $X_1(t, \omega) = X_t(\omega)$, $X_2(t, \omega) = \hat{X}_t(\omega)$ 是满足相应的初值 Z 与 $\hat{Z}$ 的解. 即

$X_1(0,\omega) = Z(\omega)$, $X_2(0,\omega) = \hat{Z}(\omega), \omega \in \Omega$. 为了达到要求, 这里只需 $Z = \hat{Z}$ 即可. 但下面更一般的估计在后面涉及到 Feller 连续性 (第 8 章) 时是有作用的. 记 $a(s,\omega) = b(s, X_s) - b(s, \hat{X}_s)$, $\gamma(s,\omega) = \sigma(s, X_s) - \sigma(s, \hat{X}_s)$. 那么

$$\begin{aligned}
E[|X_t - \hat{X}_t|^2] &= E\Big[\Big(Z - \hat{Z} + \int_0^t a ds + \int_0^t \gamma dB_s\Big)^2\Big] \\
&\leqslant 3E[|Z - \hat{Z}|^2] + 3E\Big[\Big(\int_0^t a ds\Big)^2\Big] + 3E\Big[\Big(\int_0^t \gamma dB_s\Big)^2\Big] \\
&\leqslant 3E[|Z - \hat{Z}|^2] + 3tE\Big[\int_0^t a^2 ds\Big] + 3E\Big[\int_0^t \gamma^2 ds\Big] \\
&\leqslant 3E[|Z - \hat{Z}|^2] + 3(1+t)D^2 \int_0^t E[|X_s - \hat{X}_s|^2] ds,
\end{aligned}$$

因此函数

$$v(t) = E[|X_t - \hat{X}_t|^2], \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

满足

$$v(t) \leqslant F + A\int_0^t v(s) ds, \tag{5.2.9}$$

这里 $F = 3E[|Z - \hat{Z}|^2]$; $A = 3(1+T)D^2$. 由 Gronwall 不等式 (练习 5.17) 可得出

$$v(t) \leqslant F \exp(At). \tag{5.2.10}$$

现在假定 $Z = \hat{Z}$, 那么 $F = 0$, 由此 $v(t) = 0$ 对任意的 $t \geqslant 0$ 成立. 因此

$$P[|X_t - \hat{X}_t| = 0, \quad \forall\, t \in \mathbf{Q} \cap [0,T]] = 1,$$

这里 $\mathbf{Q}$ 表示有理数集. 由 $t \to |X_t - \hat{X}_t|$ 的连续性, 得到

$$P[|X_1(t,\omega) - X_2(t,\omega)| = 0, \quad \forall\, t \in [0,T]] = 1. \tag{5.2.11}$$

唯一性得证.

存在性的证明与熟悉的常微分方程的解的存在性证明类似. 定义 $Y_t^{(0)} = X_0$, $Y_t^{(k)} = Y_t^{(k)}(\omega)$ 由下式归纳而得出

$$Y_t^{(k+1)} = X_0 + \int_0^t b(s, Y_s^{(k)}) ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s^{(k)}) dB_s, \tag{5.2.12}$$

那么类似于上面的唯一性的计算有

$$E[|Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}|^2] \leqslant (1+T)3D^2 \int_0^t E[|Y_s^{(k)} - Y_s^{(k-1)}|^2] ds.$$

对 $k \geqslant 1, t \leqslant T$ 成立. 又由

$$E[|Y_t^{(1)} - Y_t^{(0)}|^2] \leqslant 2C^2t^2(1 + E[|X_0|^2]) + 2C^2t(1 + E[|X_0|^2]) \leqslant A_1 t,$$

这里常数 A_1 仅依赖于 C, T 与 $E[|X_0|^2]$, 对 k 的归纳可得到

$$E[|Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}|^2] \leqslant \frac{A_2^{k+1} t^{k+1}}{(k+1)!}, \quad k \geqslant 0,\ t \in [0, T], \tag{5.2.13}$$

其中 A_2 是某个仅依赖于 C, D, T 和 $E[|X_0|^2]$ 的常数. 因此, 如果 λ 定义为 $[0, T]$ 上的 Lebesgue 测度, $m > n \geqslant 0$, 当 $m, n \to \infty$ 时, 得到

$$\begin{aligned}
\|Y_t^{(m)} - Y_t^{(n)}\|_{L^2(\lambda \times P)} &= \left\| \sum_{k=n}^{m-1} (Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}) \right\|_{L^2(\lambda \times P)} \\
&\leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \|Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}\|_{L^2(\lambda \times P)} \\
&= \sum_{k=n}^{m-1} \left(E\left[\int_0^T |Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}|^2 dt \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \left(\int_0^T \frac{A_2^{k+1} t^{k+1}}{(k+1)!} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{k=n}^{m-1} \left(\frac{A_2^{k+1} T^{k+2}}{(k+2)!} \right)^{\frac{1}{2}} \to 0.
\end{aligned} \tag{5.2.14}$$

因此 $\{Y_t^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ 是 $L^2(\lambda \times P)$ 中的 Cauchy 序列, 故 $\{Y_t^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ 在 $L^2(\lambda \times P)$ 中是收敛的. 定义

$$X_t := \lim_{n \to \infty} Y_t^{(n)}, \quad \text{在 } L^2(\lambda \times P) \text{ 中的极限}.$$

由于每个 $Y_t^{(n)}$ 是 $\mathcal{F}_t^Z$ 可测的, 那么 X_t 是 $\mathcal{F}_t^Z$ 可测的, 对所有的 t 都成立. 下面证明 X_t 满足 (5.2.3).

对 $\forall n, \forall t \in [0, T]$, 有

$$Y_t^{(n+1)} = X_0 + \int_0^t b(s, Y_s^{(n)}) ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s^{(n)}) dB_s.$$

令 $n \to \infty$, 则由 Hölder 不等式可得到在 $L^2(P)$ 中有

$$\int_0^t b(s, Y_s^{(n)}) ds \to \int_0^t b(s, X_s) ds.$$

由 Itô 等距性可得在 $L^2(P)$ 中有

$$\int_0^t \sigma(s, Y_s^{(n)}) dB_s \to \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s,$$

得出对任意的 $t \in [0,T]$ 有

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s \quad \text{a.s.} \tag{5.2.15}$$

即 X_t 满足 (5.2.3).

剩下的只需证明 X_t 能被选择为连续的. 由定理 3.2.5 可知 (5.2.15) 式的右边有一个连续的修正, 记这个修正为 $\tilde{X}_t$, 那么 $\tilde{X}_t$ 是连续的, 且对几乎所有的 ω 有

$$\begin{aligned}\tilde{X}_t &= X_0 + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s \\ &= \tilde{X}_0 + \int_0^t b(s,\tilde{X}_s)ds + \int_0^t \sigma(s,\tilde{X}_s)dB_s.\end{aligned}$$

5.3　弱解和强解

前面得到的解 X_t 称为强解, 因为布朗运动 B_t 的修正是事前给定的, 而由它构造出来的解 X_t 是 $\mathcal{F}_t^Z$ 适应的. 如果仅给出函数 $b(t,x)$ 和 $\sigma(t,x)$, 而要找出概率空间 $(\Omega,\mathcal{H},P)$ 上的一个配对过程 $((\tilde{X}_t,\tilde{B}_t),\mathcal{H}_t)$ 使得 (5.2.3) 成立, 那么解 $\tilde{X}_t$(或更准确地 $(\tilde{X}_t,\tilde{B}_t)$) 称为弱解. 这里 $\mathcal{H}_t$ 是一个递增的 σ 代数族, 使得 $\tilde{X}_t$ 是 $\mathcal{H}_t$ 适应的, $\tilde{B}_t$ 是一个 $\mathcal{H}_t$ 布朗运动, 即 $\tilde{B}_t$ 是一个布朗运动且关于 $\mathcal{H}_t$ 是鞅 (因此, 对 $\forall\, t,h>0$, $E[\tilde{B}_{t+h}-\tilde{B}_t|\mathcal{H}_t]=0$). 回顾第 3 章可知, 即使 $\tilde{X}_t$ 不必是 $\mathcal{F}_t^Z$ 适应的, 也可类似地对 (5.2.3) 式的右边定义 Itô 积分.

强解肯定也是弱解, 但是一般来讲弱解未必是强解. 如下面的例子 5.3.2.

前面获得的唯一性 (5.2.8) 称为强或顺向唯一性, 而弱唯一性简单地意味着任意两个解 (弱或强) 在分布上是相同的, 即有相同的有限维分布, 见文献 (Stroock, Varadhan, 1979) 关于弱解的存在性与唯一性结果. 关于强解和弱解的更一般的讨论见文献 (Krylov, Zvonkin,1981).

引理 5.3.1　如果 b 和 σ 满足定理 5.2.1 的条件, 那么可得到 (5.2.3) 的 (弱或强) 解是弱唯一的.

证明思路　设 $((\tilde{X}_t,\tilde{B}_t),\tilde{\mathcal{H}}_t)$ 和 $((\hat{X}_t,\hat{B}_t),\hat{\mathcal{H}}_t)$ 是两个弱解. 设 X_t 和 Y_t 是相应于 $\tilde{B}_t$ 和 $\hat{B}_t$ 导出的强解, 则如前面的唯一性讨论一样, 表明有 $X_t=\tilde{X}_t, Y_t=\hat{X}_t$ 对所有 t, 几乎必然成立, 因此只需证明 X_t 与 Y_t 在分布上相同即可. 可通过归纳法来证明: 如果 $X_t^{(k)}$, $Y_t^{(k)}$ 是相应的布朗运动 $\tilde{B}_t$ 和 $\hat{B}_t$ 通过 (5.2.12) 式由 Picard 迭代定义的过程, 那么 $(X_t^{(k)}, \tilde{B}_t)$ 和 $(Y_t^{(k)}, \hat{B}_t)$ 对所有的 k 有相同的分布. 它将在第 7 章及以后会用到, 那里将进一步研究随机微分方程 (Itô 扩散) 的解过程的性质. 从建模的观点来看, 弱解概念是很自然的, 因为它没有预先指定白噪声的显式

表示, 而且这个概念在数学上是很便利的, 因为有些随机微分方程没有强解, 但仍有 (弱) 唯一的弱解. 这里举一个简单的例子.

例 5.3.2(Tanaka(田中) 方程) 考虑 1 维随机微分方程

$$dX_t = \mathrm{sign}(X_t)dB_t, \quad X_0 = 0, \tag{5.3.1}$$

这里

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} +1, & \text{如果 } x \geqslant 0; \\ -1, & \text{如果 } x < 0. \end{cases}$$

注意这里 $\sigma(t,x) = \sigma(x) = \mathrm{sign}(x)$ 不满足 Lipschitz 条件 (5.2.2), 因此定理 5.2.1 不能应用. 事实上, 方程 (5.3.1) 没有强解. 为此设 $\hat{B}_t$ 是由流 $\hat{\mathcal{F}}_t$ 生成的布朗运动, 定义

$$Y_t = \int_0^t \mathrm{sign}(\hat{B}_s)d\hat{B}_s.$$

由 Tanaka 公式 (4.3.12)(练习 4.10) 有

$$Y_t = |\hat{B}_t| - |\hat{B}_0| - \hat{L}_t(\omega),$$

这里 $\hat{L}_t(\omega)$ 是 $\hat{B}_t(\omega)$ 在 0 点的局部时. 由此 Y_t 关于 $|\hat{B}_s(\cdot)|, (s \leqslant t)$ 生成的 σ 代数 $\mathcal{G}_t$ 是可测的, 显然 $\mathcal{G}_t$ 是严格地包含于 $\hat{\mathcal{F}}_t$. 因此由 $Y_s(\cdot), s \leqslant t$, 生成的 σ 代数 $\mathcal{N}_t$ 也严格地包含于 $\hat{\mathcal{F}}_t$.

现在假定 X_t 是 (5.3.1) 的强解, 那么由定理 8.4.2, X_t 是关于测度 P 的布朗运动 (读者可能担心循环论证, 在此指出定理 8.4.2 的证明与本例子无关). 设 $\mathcal{M}_t$ 是 $X_s(\cdot), s \leqslant t$ 生成的 σ 代数. 因为 $(\mathrm{sign}(x))^2 = 1$, 可重写 (5.3.1) 式为

$$dB_t = \mathrm{sign}(X_t)dX_t.$$

把上面的讨论应用于 $\hat{B}_t = X_t, Y_t = B_t$, 得到 $\mathcal{F}_t$ 是严格地包含于 $\mathcal{M}_t$.

但它与 X_t 是强解矛盾, 因此 (5.3.1) 不存在强解.

为了求 (5.3.1) 的弱解, 简单地选择 X_t 是任意的布朗运动 $\hat{B}_t$, 然后定义 $\tilde{B}_t$:

$$\tilde{B}_t = \int_0^t \mathrm{sign}(\hat{B}_s)d\hat{B}_s = \int_0^t \mathrm{sign}(X_s)dX_s,$$

即

$$d\tilde{B}_t = \mathrm{sign}(X_t)dX_t,$$

那么

$$dX_t = \mathrm{sign}(X_t)d\tilde{B}_t,$$

因此 X_t 是一个弱解.

最后, 弱唯一性由定理 8.4.2 得出. 上面的过程隐含了任何弱解 X_t 必定是关于 P 的布朗运动.

练　习

5.1. 证明给出的随机过程是给出的相应的随机微分方程的解 (B_t 表示 1 维的布朗运动).

(i) $X_t = e^{B_t}$ 为 $dX_t = \frac{1}{2}X_t dt + X_t dB_t$ 的解.

(ii) $X_t = \frac{B_t}{1+t}; B_0 = 0$ 为 $dX_t = -\frac{1}{1+t}X_t dt + \frac{1}{1+t}dB_t; X_0 = 0$ 的解.

(iii) $X_t = \sin B_t$ 且 $B_0 = a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 为 $dX_t = -\frac{1}{2}X_t dt + \sqrt{1-X_t^2}dB_t$, 其中 $t < \inf\left\{s > 0;\ B_s \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$ 的解.

(iv) $(X_1(t), X_2(t)) = (t, e^t B_t)$ 为

$$\begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ X_2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{X_1} \end{pmatrix} dB_t$$

的解.

(v) $(X_1(t), X_2(t)) = (\cosh(B_t), \sinh(B_t))$ 为

$$\begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \end{pmatrix} dB_t$$

的解.

5.2. 在椭圆 $\left\{(x,y); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$ 上, 这里 $a > 0, b > 0$, 过程 $X_t = (X_1(t), X_2(t))$, 其中 $X_1(t) = a\cos B_t, X_2(t) = b\sin B_t$. 这里 B_t 为 1 维布朗运动, 称 X_t 为椭圆上的布朗运动. 证明 X_t 是下面随机微分方程

$$dX_t = -\frac{1}{2}X_t dt + MX_t dB_t$$

的解, 其中 $M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{b} \\ \frac{b}{a} & 0 \end{pmatrix}$.

5.3.* 设 $(B_1, \cdots, B_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的布朗运动. $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为常数, 求随机微分方程

$$dX_t = rX_t dt + X_t \sum_{k=1}^{n} \alpha_k dB_k(t), \quad X_0 > 0$$

的解 (这是关于相对增长率有 n 个独立的白噪声源的指数增长模型).

5.4.* 解下面的随机微分方程:

(i) $\begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dB_1 \\ dB_2 \end{pmatrix}$.

(ii) $dX_t = X_t dt + dB_t$. 提示: 两边同乘以积分因子 e^{-t} 且与 $d(e^{-t}X_t)$ 进行比较.

(iii) $dX_t = -X_t dt + e^{-t}dB_t$.

5.5. a) 解 Ornstein-Uhlenbeck 方程或 Langevin 方程

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t,$$

这里 μ, σ 为实数, $B_t \in \mathbf{R}$, 它的解称为 Ornstein-Uhlenbeck 过程. 提示：见练习 5.4(b).

b) 求 $E[X_t]$ 和 $Var[X_t] = E[(X_t - E[X_t])^2]$.

5.6.* 解随机微分方程：

$$dY_t = rdt + \alpha Y_t dB_t,$$

这里 r, α 为常数, $B_t \in \mathbf{R}$. 提示：用积分因子 $F_t = \exp\left(-\alpha B_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t\right)$ 乘方程.

5.7.* 均值回复 Ornstein-Uhlenbeck 过程是随机微分方程

$$dX_t = (m - X_t)dt + \sigma dB_t$$

的解, 这里 m, σ 是常数, $B_t \in \mathbf{R}$.

a) 利用练习 5.5.a) 中的过程来解上述方程.

b) 求 $E[X_t]$ 和 $\mathrm{Var}[X_t] := E[(X_t - E[X_t])^2]$.

5.8.* 解 2 维随机微分方程

$$dX_1(t) = X_2(t)dt + \alpha dB_1(t),$$
$$dX_2(t) = -X_1(t)dt + \beta dB_2(t),$$

这里 $(B_1(t), B_2(t))$ 是 2 维布朗运动, α, β 是常数. 这是关于细绳在遭受随机外力下的震动模型.

5.9. 证明 1 维随机微分方程

$$dX_t = \ln(1 + X_t^2)dt + \chi_{\{X_t > 0\}} X_t dB_t, \quad X_0 = a \in \mathbf{R}$$

存在唯一的强解 X_t.

5.10. 设 b, σ 满足 (5.2.1), (5.2.2), X_t 是 (5.2.3) 的唯一强解, 证明：

$$E[|X_t|^2] \leqslant K_1 \cdot \exp(K_2 t), \quad t \leqslant T, \tag{5.3.2}$$

这里 $K_1 = 3E[|Z|^2] + 6C^2T(T+1), K_2 = 6(1+T)C^2$. 提示：利用 (5.2.10) 的论证.

附注　如果对 (5.2.1) 中 b 与 σ 的增长有一个全局 (整体) 估计, 则也可能对 (5.3.2) 改进为 $E[|X_t|^2]$ 的整体估计. 见练习 7.5.

5.11.* (布朗桥) 对固定的 $a, b \in \mathbf{R}$, 考虑下面的 1 维方程

$$dY_t = \frac{b - Y_t}{1 - t}dt + dB_t, \quad 0 \leqslant t < 1, \ Y_0 = a. \tag{5.3.3}$$

证明：

$$Y_t = a(1-t) + bt + (1-t)\int_0^t \frac{dB_s}{1-s}, \quad 0 \leqslant t < 1 \tag{5.3.4}$$

是方程的解, 且有 $\lim\limits_{t \to 1} Y_t = b$ 几乎必然成立. 过程 Y_t 称为布朗桥 (从 a 到 b). Y_t 的其他特征见文献 (Rogers, Williams, 1987, 第 86-89 页).

5.12.* 为了描述钟摆受到一个小的随机扰动情形下的运动, 用下面的方程形式:

$$y''(t) + (1 + \varepsilon W_t)y = 0, \quad y(0),\ y'(0)\text{给定},$$

这里 $W_t = \dfrac{dB_t}{dt}$ 是 1 维的白噪声, $\varepsilon > 0$ 为常数.

a) 如例 5.1.3 一样讨论这个方程.

b) 证明 $y(t)$ 是如下形式的随机 Volterra 方程

$$y(t) = y(0) + y'(0)\cdot t + \int_0^t a(t,r)y(r)dr + \int_0^t \gamma(t,r)y(r)dB_r$$

的解. 这里 $a(t,r) = r - t,\ \gamma(t,r) = \varepsilon(r-t)$.

5.13. 一个被系住的漂浮平台的水平缓慢漂移运动或船只受到不规则波动的回应的模型描述, John Grue(1989) 引进了下面的方程:

$$x_t'' + a_0 x_t' + w^2 x_t = (T_0 - \alpha_0 x_t')\eta W_t, \tag{5.3.5}$$

这里 W_t 是 1 维白噪声, a_0, w, T_0, α_0 和 η 是常数.

(i) 设 $X_t = \begin{pmatrix} x_t \\ x_t' \end{pmatrix}$, 方程重写为下面的形式

$$dX_t = AX_tdt + KX_tdB_t + MdB_t,$$

这里

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -a_0 \end{pmatrix}, \quad K = \alpha_0\eta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M = T_0\eta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) 证明: 如果 $X_0 = 0$, 则 X_t 满足积分方程

$$X_t = \int_0^t e^{A(t-s)}KX_sdB_s + \int_0^t e^{A(t-s)}MdB_s.$$

(iii) 证明

$$e^{At} = \frac{e^{-\lambda t}}{\xi}\{(\xi\cos\xi t + \lambda\sin\xi t)I + A\sin\xi t\},$$

这里 $\lambda = \dfrac{a_0}{2},\ \xi = \left(w^2 - \dfrac{a_0^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$, 利用上述结果证明

$$x_t = \eta\int_0^t (T_0 - \alpha_0 y_s)g_{t-s}dB_s, \tag{5.3.6}$$

$$y_t = \eta\int_0^t (T_0 - \alpha_0 y_s)h_{t-s}dB_s, \tag{5.3.7}$$

其中 $y_t = x_t'$, 这里

$$g_t = \frac{1}{\xi}\mathrm{Im}(e^{\zeta t}), \quad h_t = \frac{1}{\xi}\mathrm{Im}(\zeta e^{\bar{\zeta}t}), \quad \zeta = -\lambda + i\xi, \quad i = \sqrt{-1}.$$

由此在 (5.3.7) 中先解出 y_t, 然后代入 (5.3.6) 中再求 x_t.

5.14. 如果 $(B_1,\ B_2)$ 表示 2 维的布朗运动, 可以引进复布朗运动概念

$$B(t) := B_1(t) + iB_2(t), \quad i = \sqrt{-1},$$

$B(t)$ 称为复布朗运动.

(i) 如果 $F(z) = u(z) + iv(z)$ 是一个解析函数, 即 F 满足 Cauchy-Riemann 方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad z = x + iy.$$

定义 $Z_t = F(B(t))$, 证明

$$dZ_t = F'(B(t))dB(t), \tag{5.3.8}$$

这里 F' 是表示 F 的 (复) 导数. 注意, 在 (实)Itô 公式中常见的二阶项在 (5.3.8) 式中并未出现.

(ii) 解复随机微分方程

$$dZ_t = \alpha Z_t dB(t)$$

(α 为常数) 更多的关于复随机分析及解析函数知识见文献 (Ubøe, 1987).

5.15. (随机的拥挤环境下的人口增长) 非线性随机微分方程

$$dX_t = rX_t(K - X_t)dt + \beta X_t dB_t, \quad X_0 = x > 0 \tag{5.3.9}$$

经常被用来作为在随机的拥挤环境下的人口为 X_t 的人口增长模型, 常数 $K > 0$ 称为环境的容许负荷量, 常数 $r \in \mathbf{R}$ 度量环境的质量. 常数 β 度量系统中噪声的大小. 证明

$$X_t = \frac{\exp\{(rk - \frac{1}{2}\beta^2)t + \beta B_t\}}{x^{-1} + r\displaystyle\int_0^t \exp\{(rk - \frac{1}{2}\beta^2)s + \beta B_s\}ds}, \quad t \geqslant 0 \tag{5.3.10}$$

是 (5.3.9) 的唯一 (强) 解 (该解可通过一个替代 (变量代换) 把 (5.3.9) 简化为一个线性方程. 细节见文献 (Gard, 1988, 第 4 章).

5.16.* 练习 5.6 中的技巧能应用于形式更一般的非线性随机微分方程:

$$dX_t = f(t, X_t)dt + c(t)X_t dB_t, \quad X_0 = x, \tag{5.3.11}$$

这里 $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 和 $c : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是给定的连续 (确定性的) 函数. 步骤如下:

a) 定义“积分因子”

$$F_t = F_t(\omega) = \exp\Big(-\int_0^t c(s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t c^2(s)ds\Big). \tag{5.3.12}$$

证明 (5.3.11) 可写成

$$d(F_t X_t) = F_t \cdot f(t, X_t)dt. \tag{5.3.13}$$

b) 现在定义

$$Y_t(\omega) = F_t(\omega)X_t(\omega), \tag{5.3.14}$$

因此

$$X_t = F_t^{-1} Y_t. \tag{5.3.15}$$

代入方程 (5.3.13) 可得到如下形式

$$\frac{dY_t(\omega)}{dt} = F_t \cdot f(t, F_t^{-1}(\omega) Y_t(\omega)), \quad Y_0 = x, \tag{5.3.16}$$

注意对每个给定的 $\omega \in \Omega$, 上面的方程是关于函数 $t \to Y_t(\omega)$ 的确定性的微分方程. 因此可把 ω 作为参数对 (5.3.16) 求解 $Y_t(\omega)$, 再而由 (5.3.15) 可得到 $X_t(\omega)$.

c) 应用这个方法求解随机微分方程

$$dX_t = \frac{1}{X_t} dt + \alpha X_t dB_t, \quad X_0 = x > 0, \tag{5.3.17}$$

这里 α 是常数.

d) 应用该方法研究随机微分方程

$$dX_t = X_t^{\gamma} + \alpha X_t dB_t, \quad X_0 = x > 0 \tag{5.3.18}$$

的解. 这里 α, γ 都是常数. 当 γ 为何值时, 解会爆炸?

5.17. (Gronwall 不等式)　设 $v(t)$ 是一个非负函数且满足对某些常数 C, A 有

$$v(t) \leqslant C + A \int_0^t v(s) ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

证明

$$v(t) \leqslant C \exp(At), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5.3.19}$$

提示：可假定 $A \neq 0$, 定义 $w(t) = \int_0^t v(s) ds$, 那么 $w'(t) \leqslant C + Aw(t)$, 推出

$$w(t) \leqslant \frac{C}{A}(\exp(At) - 1), \tag{5.3.20}$$

通过考虑 $f(t) = w(t)\exp(-At)$, 再利用 (5.3.20) 导出 (5.3.19)).

5.18. 几何均值回复过程 X_t 定义为如下随机微分方程

$$dX_t = k(\alpha - \log X_t) X_t dt + \sigma X_t dB_t, \quad X_0 = x > 0 \tag{5.3.21}$$

的解. 这里 k, α, σ, x 都为正常数. 这个过程被 Tvedt(1995) 用于模拟海运中的现场运货率.

a) 证明 (5.3.21) 的解为

$$X_t = \exp\left(e^{-kt} \ln x + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2k}\right)(1 - e^{kt}) + \sigma e^{-kt} \int_0^t e^{ks} dB_s\right). \tag{5.3.22}$$

提示：把 $Y_t = \log X_t$ 代入到 (5.3.21) 中化为关于 Y_t 的线性方程.

b) 证明

$$E[X_t] = \exp\left(e^{-kt} \ln x + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2k}\right)(1 - e^{-kt}) + \frac{\sigma^2(1 - e^{-2kt})}{2k}\right).$$

5.19. 设 $Y_t^{(k)}$ 是由 (5.2.12) 归纳定义的过程. 证明 $\{Y_t^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ 对几乎所有的 ω 关于 $t\in[0,T]$ 是一致收敛的. 由于 $Y_t^{(n)}$ 是连续的, 这样给出了在定理 5.2.1 中 X_t 能被选择为连续的直接证明. 提示: 注意

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)}|\leqslant\int_0^T|b(s,Y_s^{(k)})-b(s,Y_s^{(k-1)})|ds$$

$$+\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t(\sigma(s,Y_s^{(k)})-\sigma(s,Y_s^{(k-1)}))ds\right|.$$

因此

$$P\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)}|>2^{-k}\Big]$$

$$\leqslant P\Big[\int_0^t|b(s,Y_s^{(k)})-b(s,Y_s^{(k-1)})|ds>2^{-k-1}\Big]$$

$$+P\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\int_0^t(\sigma(s,Y_s^{(k)})-\sigma(s,Y_s^{(k-1)}))dB_s|>2^{-k-1}\Big].$$

现在相应地利用 Chebychev 不等式、Hölder 不等式和鞅不等式 (定理 3.2.4), 结合 (5.2.13) 证明出对某个常数 $A<\infty$, 有

$$P\Big[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)}|>2^{-k}\Big]\leqslant\frac{(AT)^{k+1}}{(k+1)!},$$

再由 Borel-Cantelli 引理推出结论.

第6章 滤波问题

6.1 引　　言

导论中问题 3 是下面的一般滤波问题的特殊情形：假定在 t 时的系统状态 $X_t \in \mathbf{R}^n$ 由下面的随机微分方程给出

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)W_t, \quad t \geqslant 0, \tag{6.1.1}$$

这里 $b: \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$, $\sigma: \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^{n \times p}$ 满足条件 (5.2.1), (5.2.2), W_t 是 p 维的白噪声. 像前面讨论的那样, 上面方程的 Itô 解释是

$$(\text{系统})\ \ dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dU_t, \tag{6.1.2}$$

这里 U_t 是 p 维布朗运动. 假定 X_0 的分布已知且与 U_t 独立. 类似于 1 维情形 (3.3.6), (6.1.1) 也有一个多维的 Stratonovich 解释：

$$dX_t = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \circ dU_t,$$

而它的 Itô 积分如下：

$$dX_t = \tilde{b}(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dU_t,$$

这里 (Stratonovich 1966)

$$\tilde{b}_i(t, x) = b_i(t, x) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k}\sigma_{kj}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{6.1.3}$$

从现在起将利用 Itô 解释 (6.1.2).

对滤波问题的连续修正, 假定观测值 $H_t \in \mathbf{R}^m$ 是连续的且有如下形式：

$$H_t = c(t, X_t) + \gamma(t, X_t) \cdot \tilde{W}_t, \tag{6.1.4}$$

这里 c： $\mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^m$, γ： $\mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^{m \times r}$ 是满足 (5.2.1) 的函数, $\tilde{W}_t$ 表示 r 维的白噪声, 且与 U_t, X_0 独立.

为了获得关于 (6.1.4) 的较易处理的数学解释, 引进

$$Z_t = \int_0^t H_s ds, \tag{6.1.5}$$

得到随机积分表示

$$(\text{观测})\quad dZ_t = c(t, X_t)dt + \gamma(t, X_t)dV_t, \quad Z_0 = 0, \tag{6.1.6}$$

这里 V_t 是 r 维布朗运动, 与 U_t, X_0 独立.

注意, 如果对 $0 \leqslant s \leqslant t$, H_s 为已知, 则对 $0 \leqslant s \leqslant t$, Z_s 也是已知的, 反过来也成立. 因此用 Z_t 代替 H_t 作为"观测值"不会丢失或得到多余的信息, 但得到一个更好定义的数学模型.

滤波问题如下: 对 $0 \leqslant s \leqslant t$, 给定观测值 Z_s 满足 (6.1.6). 基于观测值, 对系统 (6.1.2) 的状态 X_t 的最佳估计是什么?

像早先指出的那样, 必须找到这个问题的简明的数学公式. 说估计 $\hat{X}_t$ 是基于观测值 $\{Z_s:\ s \leqslant t\}$ 意味着

$$\hat{X}_t(\cdot)\text{是 } \mathcal{G}_t \text{ 可测的}, \tag{6.1.7}$$

这里 $\mathcal{G}_t$ 是由 $\{Z_s:\ s \leqslant t\}$ 生成的 σ 代数. 说 $\hat{X}_t$ 是最佳估计意味着

$$\int_\Omega |X_t - \hat{X}_t|^2 dP = E[|X_t - \hat{X}_t|^2] = \inf\{E[|X_t - Y|^2]; Y \in \mathcal{K}\}, \tag{6.1.8}$$

这里及以后的章节都用 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 表示初始值在原点的 $(p+r)$ 维布朗运动 (U_t, V_t) 的概率空间, E 表示关于 P 的期望,

$$\mathcal{K} := \mathcal{K}_t := \mathcal{K}(Z, t) := \{Y : \Omega \to \mathbf{R}^n;\ Y \in L^2(P)\text{且 } Y \text{ 是 } \mathcal{G}_t \text{ 可测的}\}, \tag{6.1.9}$$

这里 $L^2(P) = L^2(\Omega, P)$.

为了找到问题的数学公式, 现在研究解 $\hat{X}_t$ 的性质.

先建立下面关于条件期望与投影之间有用的关系.

引理 6.1.1　设 $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ 是一个 σ 代数. $X \in L^2(P)$ 是 $\mathcal{F}$ 可测的. $\mathcal{N} = \{Y \in L^2(P);\ Y\text{是 } \mathcal{H} \text{ 可测的}\}$. $\mathcal{P}_\mathcal{N}$ 表示从 Hilbert 空间 $L^2(P)$ 到子空间 $\mathcal{N}$ 上的 (正交) 投影. 那么

$$\mathcal{P}_\mathcal{N}(X) = E[X|\mathcal{H}].$$

证明　回顾 (见附录 B)$E[X|\mathcal{H}]$ 是定义为从 Ω 到 $\mathbf{R}$ 的 P 唯一函数满足

(i) $E[X|\mathcal{H}]$ 是 $\mathcal{H}$ 可测的.

(ii) $\int_A E[X|\mathcal{H}]dP = \int_A XdP,\ \forall A \in \mathcal{H}$.

现在 $\mathcal{P}_\mathcal{N}(X)$ 是 $\mathcal{H}$ 可测的, 且

$$\int_\Omega Y(X - \mathcal{P}_\mathcal{N}(X))dP = 0, \quad \forall Y \in \mathcal{N},$$

特别

$$\int_A (X - \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(X))dP = 0, \quad \forall A \in \mathcal{H},$$

即

$$\int_A \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(X)dP = \int_A XdP, \quad \forall A \in \mathcal{H},$$

因此由唯一性, 有 $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(X) = E[X|\mathcal{H}]$.

从 Hilbert 空间的一般理论可知, 问题 (6.1.8) 的解 $\hat{X}_t$ 由投影 $\mathcal{P}_{\mathcal{K}_t}(X_t)$ 给出. 因此引理 6.1.1 导出下面的有用的结果.

定理 6.1.2　$\hat{X}_t = \mathcal{P}_{\mathcal{K}_t}(X_t) = E[X_t|\mathcal{G}_t]$.

这是讨论滤波理论中一般的 Fujisaki-Kallianpur-Kunita 方程的基础 (Bensoussan, 1992; Davis, 1984; Kallianpur, 1980).

6.2　1 维的线性滤波问题

从现在起将在线性情形求得随机微分方程关于 $\hat{X}_t$ 的显式解 (Kalman-Bucy 滤波器).

在线性滤波问题中, 系统和观测方程有如下形式:

$$\text{(线性系统)}\ dX_t = F(t)X_t dt + C(t)dU_t, \quad F(t) \in \mathbf{R}^{n\times n}, C(t) \in \mathbf{R}^{n\times p}, \tag{6.2.1}$$

$$\text{(线性观测)}\ dZ_t = G(t)X_t dt + D(t)dV_t, \quad G(t) \in \mathbf{R}^{m\times n}, D(t) \in \mathbf{R}^{m\times r}. \tag{6.2.2}$$

为了集中主要思想于滤波问题的解. 先考虑 1 维的情形

$$\text{(线性系统)}\ dX_t = F(t)X_t dt + C(t)dU_t, \quad F(t),\ C(t) \in \mathbf{R}, \tag{6.2.3}$$

$$\text{(线性观测)}\ dZ_t = G(t)X_t dt + D(t)dV_t, \quad G(t),\ D(t) \in \mathbf{R}. \tag{6.2.4}$$

假定 (见 (5.2.1))F, G, C, D 在有界区间上是有界的. 基于对 Z_t 的解释 (6.1.5), 可设 $Z_0 = 0$. 也假定 X_0 是正态分布的 (与 $\{U_t\}, \{V_t\}$ 独立). 最后假定 $D(t)$ 在有界区间上是有界的且不接近 0.

推广到多维情形 (6.2.1), (6.2.2) 是技术性的, 但并不需要本质上的新的思想. 因此在讨论了 1 维情形后, 对多维情形 (在下节) 只叙述结论, 希望读者自己发现必要的调整, 或查阅文献 (Bensoussan, 1992; Davis, 1997; Kallianpur, 1980) 等关于多维情形的处理.

现在设 X_t, Z_t 是满足 (6.2.3), (6.2.4) 的过程. 下面是求解滤波问题的大致轮廓.

步骤 1.　设 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(Z, t)$ 表示由 $L^2(P)$ 中如下的线性组合形式

$$c_0 + c_1 Z_{s_1}(\omega) + \cdots + c_k Z_{s_k}(\omega), \quad s_j \leqslant t,\ c_j \in \mathbf{R}$$

的函数集合的闭包. 设 $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ 表示从 $L^2(P)$ 到 $\mathcal{L}$ 上的投影. $\mathcal{K}$ 如 (6.1.9).

$$\hat{X}_t = \mathcal{P}_{\mathcal{K}}(X_t) = E[X_t|\mathcal{G}_t] = \mathcal{P}_{\mathcal{L}}(X_t),$$

因此对于 X_t 的最佳的 Z 可测估计与最佳的 Z 线性估计一致.

步骤 2. 用更新过程 N_t 取代 Z_t,

$$N_t = Z_t - \int_0^t (GX)_s^{\wedge} ds,$$

这里

$$(GX)_s^{\wedge} = \mathcal{P}_{\mathcal{L}(Z,s)}(G(s)X_s) = G(s)\hat{X}_s,$$

那么 (i) N_t 具有正交增量性, 即对任意没有交叠的区间 $[s_1, t_1]$, $[s_2, t_2]$ 有

$$E[(N_{t_1} - N_{s_1})(N_{t_2} - N_{s_2})] = 0.$$

(ii) $\mathcal{L}(N,t) = \mathcal{L}(Z,t)$. 因此 $\hat{X}_t = \mathcal{P}_{\mathcal{L}(N,t)}(X_t)$.

步骤 3. 如果设

$$dR_t = \frac{1}{D(t)} dN_t,$$

那么 R_t 是一个 1 维的布朗运动, 而且有

$$\mathcal{L}(N,t) = \mathcal{L}(R,t)$$

和

$$\hat{X}_t = \mathcal{P}_{\mathcal{L}(N,t)}(X_t) = \mathcal{P}_{\mathcal{L}(R,t)}(X_t) = E[X_t] + \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} E[X_t R_s] dR_s.$$

步骤 4. 通过解下面的 (线性) 随机微分方程, 找到一个关于 X_t 的表达式:

$$dX_t = F(t) X_t dt + C(t) dU_t.$$

步骤 5. 把步骤 3 中求出的 X_t 代入到 $E[X_t R_s]$, 且利用步骤 3 得到关于 $\hat{X}_t$ 的随机微分方程

$$d\hat{X}_t = \frac{\partial}{\partial s} E[X_t R_s]_{s=t} dR_t + \Big(\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} E[X_t R_s] dR_s \Big) dt.$$

在完成步骤 1~5 的过程之前, 先考虑一个简单但又目的明确的例子.

例 6.2.1　假定 $X, W_1, W_2, \cdots$ 是独立的实随机变量, 对所有的 j, 有 $E[X] = E[W_j] = 0$, $E[X^2] = a^2$, $E[W_j^2] = m^2$, 设 $Z_j = X + W_j$, 基于 $\{Z_j;\ j \leqslant k\}$, 关于 X 的最佳估计 $\hat{X}$ 是什么? 更简单地, 设

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(Z,k) = \{c_1 Z_1 + \cdots + c_k Z_k;\ \ c_1, \cdots, c_k \in \mathbf{R}\},$$

那么, 需要求出

$$\hat{X}_k = \mathcal{P}_k(X),$$

这里 $\mathcal{P}_k$ 表示在 $\mathcal{L}(Z,k)$ 上的投影.

利用 Gramm-Schmidt 正交化方法获得随机变量 $A_1, A_2, \cdots$ 使得

(i) $E[A_i A_j] = 0,\ i \neq j$.

(ii) $\mathcal{L}(A,k) = \mathcal{L}(Z,k)$, 对所有的$k$.

则有

$$\hat{X}_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{E[XA_j]}{E[A_j^2]} A_j, \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{6.2.5}$$

可得到关于 $\hat{X}_k$ 与 $\hat{X}_{k-1}$ 的一个递推关系, 因为 $\mathcal{P}_{j-1}(W_j) = 0$, 故由

$$A_j = Z_j - \mathcal{P}_{j-1}(Z_j) = Z_j - \mathcal{P}_{j-1}(X),$$

得到

$$A_j = Z_j - \hat{X}_{j-1}, \tag{6.2.6}$$

故此

$$E[XA_j] = E[X(Z_j - \hat{X}_{j-1})] = E[X(X - \hat{X}_{j-1})] = E[(X - \hat{X}_{j-1})^2],$$

而

$$E[A_j^2] = E[(X + W_j - \hat{X}_{j-1})^2] = E[(X - \hat{X}_{j-1})^2] + m^2.$$

从而可得

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k-1} + \frac{E[(X - \hat{X}_{k-1})^2]}{E[(X - \hat{X}_{k-1})^2] + m^2}(Z_k - \hat{X}_{k-1}). \tag{6.2.7}$$

如果引入

$$\bar{Z}_k = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} Z_j.$$

则可简化为

$$\hat{X}_k = \frac{a^2}{a^2 + \frac{1}{k}m^2}\bar{Z}_k. \tag{6.2.8}$$

因为可设

$$\alpha_k = \frac{a^2}{a^2 + \frac{1}{k}m^2}, \quad U_k = \alpha_k \bar{Z}_k.$$

则 (i) $U_k \in \mathcal{L}(Z,k)$.

(ii) $X-U_k\perp\mathcal{L}(Z,k)$, 因为

$$\begin{aligned}E[(X-U_k)Z_i]&=E[XZ_i]-\alpha_kE[\bar{Z}_kZ_i]\\&=E[X(X+W_i)]-\alpha_k\frac{1}{k}\sum_j E[Z_jZ_i]\\&=a^2-\frac{1}{k}\alpha_k\sum_j E[(X+W_j)(X+W_i)]\\&=a^2-\frac{1}{k}\alpha_k[ka^2+m^2]=0.\end{aligned}$$

该结果可解释如下: 对足够大的 k, 可设 $\hat{X}_k\approx\bar{Z}_k$, 但对较小的 k, a^2 与 m^2 的关系变得更重要. 如果 $m^2>>a^2$, 观察值在一个大的范围内被忽略 (较小的 k), $\hat{X}_k$ 被认为按近于它的均值 0. 见练习 6.11.

该例题对上面的方法给出了明确目的: 为了获得一个类似于 (6.2.5) 的关于 $\hat{X}_t$ 的表示, 可用正交增量过程 N_t(步骤 2) 取代过程 Z_t, 在认为最佳的线性估计和最佳的可测估计 (步骤 1) 是相同的时, 建立了 N_t 与布朗运动之间的联系, 而这样的表示在步骤 3 可中得到.

步骤 1. Z 线性和 Z 可测估计.

引理 6.2.2 设 X,Z_s; $s\leqslant t$ 是 $L^2(P)$ 中的随机变量且假定

$$(X,Z_{s_1},Z_{s_2},\cdots,Z_{s_n})\in\mathbf{R}^{n+1}$$

对所有的 $s_1,s_2,\cdots,s_n\leqslant t$, $n\geqslant 1$ 服从正态分布. 那么

$$\mathcal{P}_{\mathcal{L}}(X)=E[X|\mathcal{G}]=\mathcal{P}_k(X),$$

换句话说, 在这种情形下, 对 X 的最佳的 Z 线性估计与最佳的 Z 可测估计是一致的.

证明 设 $\check{X}=\mathcal{P}_{\mathcal{L}}(X)$, $\tilde{X}=X-\check{X}$, 则可知有 $\tilde{X}$ 与 $\mathcal{G}$ 独立. 回顾随机变量 $(Y_1,\cdots,Y_k)\in\mathbf{R}^k$ 为正态的充要条件是 $c_1Y_1+\cdots+c_kY_k$ 对任意的 $c_1,\cdots,c_k\in\mathbf{R}$ 都是正态的. 正态序列的 L^2 极限也是正态的 (附录 A). 因此 $(\tilde{X},Z_{s_1},\cdots,Z_{s_n})$ 对所有的 $s_1,\cdots,s_n\leqslant t$ 是正态的. 由于对 $1\leqslant j\leqslant n$, $E[\tilde{X}Z_{s_j}]=0$, 故 $\tilde{X}$ 与 Z_{s_j} 是不相关的. 由附录 A 知

$$\tilde{X}\text{ 和 }(Z_{s_1},\cdots,Z_{s_n})\text{ 是独立的},$$

因此, $\tilde{X}$ 与 $\mathcal{G}$ 是独立的. 但是

$$E[\chi_G(X-\check{X})]=E[\chi_G\tilde{X}]=E[\chi_G]E[\tilde{X}]=0,\quad\forall\,G\in\mathcal{G},$$

即 $\int_G XdP=\int_G\check{X}dP$. 因为 $\check{X}$ 是 $\mathcal{G}$ 可测的, 故有结论 $\check{X}=E[X|\mathcal{G}]$.

对此结果有一个难以理解的解释：假如 $X, \{Z_t\}_{t\in T}$ 是 $L^2(P)$ 函数，且协方差也已知. 则对 $(X, Z_{t_1}, \cdots, Z_{t_n})$ 的所有可能的分布，正态分布在如下意义下，对估计来讲是“最坏的”：对任何分布，有

$$E[(X - E[X|\mathcal{G}])^2] \leqslant E[(X - \mathcal{P}_{\mathcal{L}}(X))^2].$$

而由引理 6.2.2, 当它们为正态分布时上式等号成立 (注意，上式右边的数值仅依赖于它的协方差，而与在该协方差下所选择的分布无关). 基于自然界与观测之间的信息博弈理论方面的一些类似结论的更深入的讨论见文献 (Topsoe, 1978).

最后为了把引理 6.2.2 应用于滤波问题，必须要有下面的结果：

引理 6.2.3 $M_t = \begin{pmatrix} X_t \\ Z_t \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$是一个 Gauss 过程.

证明 可以认为 M_t 是如下形式的 2 维线性随机微分方程的解：

$$dM_t = H(t)M_t dt + K(t)dB_t, \quad M_0 = \begin{pmatrix} X_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{6.2.9}$$

这里 $H(t) \in \mathbf{R}^{2\times 2}$, $K(t) \in \mathbf{R}^{2\times 2}$, B_t 是一个 2 维的布朗运动.

利用 Picard 迭代法解 (6.2.9), 即设

$$M_t^{(n+1)} = M_0 + \int_0^t H(s)M_s^{(n)}ds + \int_0^t K(s)dB_s, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{6.2.10}$$

那么 $M_t^{(n)}$ 对所有的 n 都是 Gauss 过程，且在 $L^2(P)$ 中，$M_t^{(n)} \to M_t$(见定理 5.2.1 的证明)，因此 M_t 是 Gauss 过程 (定理 A.7).

步骤 2. 更新过程.

在引入更新过程之前，先建立一个有用的空间函数表示. 空间 $\mathcal{L}(Z, T) = L^2(P)$ 中所有的线性组合形式$c_0 + c_1 Z_{t_1} + \cdots + c_k Z_{t_k}$的集合的闭包，其中 $0 \leqslant t_i \leqslant T, c_j \in \mathbf{R}$. 注意，如果 $f \in L^2[0, T]$. 则有

$$\begin{aligned} E\left[\left(\int_0^T f(t)dZ_t\right)^2\right] = {} & E\left[\left(\int_0^T f(t)G(t)X_t dt\right)^2\right] + E\left[\left(\int_0^T f(t)D(t)dV_t\right)^2\right] \\ & + 2E\left[\left(\int_0^T f(t)G(t)X_t dt\right)\left(\int_0^T f(t)D(t)dV_t\right)\right]. \end{aligned}$$

因由 Cauchy-Schwartz 不等式有 $E\left[\left(\int_0^T f(t)G(t)X_t dt\right)^2\right] \leqslant A_1 \int_0^T f^2(t)dt$, 及由 Itô 等距有

$$E\left[\left(\int_0^T f(t)D(t)dV_t\right)^2\right] = \int_0^T f^2(t)D^2(t)dt,$$

并且 $\{X_t\}$, $\{V_t\}$ 具有独立性, 可得出

$$A_0\int_0^T f^2(t)dt \leqslant E\left[\left(\int_0^T f(t)dZ_t\right)^2\right] \leqslant A_2\int_0^T f^2(t)dt, \tag{6.2.11}$$

其中 A_0, A_1, A_2 是与 f 无关的常数.

现在可证明以下引理:

引理 6.2.4　$\mathcal{L}(Z,T)=\left\{c_0+\int_0^T f(t)dZ_t;\ f\in L^2[0,T],\ c_0\in\mathbf{R}\right\}$.

证明　把右边记为 $\mathcal{N}(Z,T)$. 只需证明以下几点:

a) $\mathcal{N}(Z,T)\subset\mathcal{L}(Z,T)$.

b) $\mathcal{N}(Z,T)$ 包含所有如下的线性组合形式:

$$c_0+c_1Z_{t_1}+\cdots+c_kZ_{t_k},\quad 0\leqslant t_i\leqslant T.$$

c) $\mathcal{N}(Z,T)$ 在 $L^2(P)$ 中是闭的.

由 f 的连续性, 有

$$\int_0^T f(t)dZ_t=\lim_{n\to\infty}\sum_j f(j\cdot 2^{-n})(Z_{(j+1)2^{-n}}-Z_{j\cdot 2^{-n}}).$$

假定 $0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_k\leqslant T$. 有

$$\sum_{i=1}^k c_iZ_{t_i}=\sum_{j=0}^{k-1}c_j'\Delta Z_j=\sum_{j=0}^{k-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}c_j'dZ_t=\int_0^T\left(\sum_{j=0}^{k-1}c_j'\mathcal{X}_{[t_j,t_{j+1})}(t)\right)dZ_t,$$

这里 $\Delta Z_j=Z_{t_{j+1}}-Z_{t_j}$. b) 得证.

c) 由 (6.2.11) 式及 $L^2[0,T]$ 的完备性推出.

现在定义更新过程 N_t 如下:

$$N_t=Z_t-\int_0^t (GX)_s^\wedge ds, \tag{6.2.12}$$

这里 $(GX)_s^\wedge=\mathcal{P}_{\mathcal{L}(Z,s)}(G(s)X_s)=G(s)\hat{X}_s$, 其微分形式为

$$dN_t=G(t)(X_t-\hat{X}_t)dt+D(t)dV_t. \tag{6.2.13}$$

引理 6.2.5　(i) N_t 具有正交增量性.

(ii) $E[N_t^2]=\int_0^t D^2(s)ds$.

(iii) $\mathcal{L}(N,t)=\mathcal{L}(Z,t)$, $\forall\, t\geqslant 0$.

(iv) N_t 是一个 Gauss 过程.

证明　(i) 假设 $s \leqslant t$, 及 $Y \in \mathcal{L}(Z,s)$. 由于对 $r \geqslant s$, 有 $X_r - \hat{X}_r \perp \mathcal{L}(Z,r) \supset \mathcal{L}(Z,s)$, 及 V 有独立增量性, 可得

$$E[(N_t - N_s)Y] = E\left[\left(\int_s^t G(r)(X_r - \hat{X}_r)dr + \int_s^t D(r)dV_r\right)Y\right]$$
$$= \int_s^t G(r)E[(X_r - \hat{X}_r)Y]dr + E\left[\left(\int_s^t DdV\right)Y\right] = 0.$$

(ii) 设 $g(t,x) = x^2$, 由 Itô 公式, 有

$$d(N_t^2) = 2N_t dN_t + \frac{1}{2}2(dN_t)^2 = 2N_t dN_t + D^2 dt,$$

因此

$$E[N_t^2] = E\left[\int_0^t 2N_s dN_s\right] + \int_0^t D^2(s)ds,$$

然而

$$\int_0^t N_s dN_s = \lim_{\Delta t_j \to 0} \sum N_{t_j}[N_{t_{j+1}} - N_{t_j}].$$

由 N 有正交增量性可得

$$E\left[\int_0^t N_s dN_s\right] = 0.$$

得出 (ii).

(iii) 显然, 对所有的 $t \geqslant 0$, 有 $\mathcal{L}(N,t) \subset \mathcal{L}(Z,t)$. 下面利用引理 6.2.4 建立反包含关系. 选择 $f \in L^2[0,T]$, 则有

$$\int_0^t f(s)dN_s = \int_0^t f(s)dZ_s - \int_0^t f(r)G(r)\hat{X}_r dr$$
$$= \int_0^t f(s)dZ_s - \int_0^t f(r)\left[\int_0^r g(r,s)dZ_s\right]dr - \int_0^t f(r)c(r)dr$$
$$= \int_0^t \left[f(s) - \int_s^t f(r)g(r,s)dr\right]dZ_s - \int_0^t f(r)c(r)dr,$$

这里利用了引理 6.2.2 和引理 6.2.4, 对每个 r, 存在函数 $g(r,\cdot) \in L^2[0,r]$, $c(r) \in \mathbf{R}$ 使得

$$(GX)_r^{\wedge} = c(r) + \int_0^r g(r,s)dZ_s.$$

由 Volterra 积分方程理论 (Davis, 1977), 对任意的 $h \in L^2[0,t]$, 存在一个函数 $f \in L^2[0,t]$, 使得

$$f(s) - \int_s^t f(r)g(r,s)dr = h(s),$$

因此选择 $h = \mathcal{X}_{[0,t_1]}$, 这里 $0 \leqslant t_1 \leqslant t$. 得到

$$\int_0^t f(r)c(r)dr + \int_0^t f(s)dN_s = \int_0^t \mathcal{X}_{[0,t_1]}(s)dZ_s = Z_{t_1}.$$

这样得到 $\mathcal{L}(N,t) \supset \mathcal{L}(Z,t)$.

(iv) $\hat{X}_t$ 是如下的线性组合形式

$$M = c_0 + c_1 Z_{s_1} + \cdots + c_k Z_{s_k}, \quad s_k \leqslant t$$

的极限 (在 $L^2(P)$ 中的). 因此

$$(\hat{X}_{t_1}, \cdots, \hat{X}_{t_m})$$

是 m 维随机变量 $(M^{(1)}, \cdots, M^{(m)})$ 的极限. 其中分量 $M^{(j)}$ 是如上的线性组合形式. 由于 $\{Z_t\}$ 是 Gauss 的, 因此 $(M^{(1)}, \cdots, M^{(m)})$ 是正态分布. 故此它的极限也有这样的性质, 即 $\{\hat{X}_t\}$ 是 Gauss 的. 同样的讨论可得到

$$N_t = Z_t - \int_0^t G(s)\hat{X}_s ds$$

也是 Gauss 的.

步骤 3. 更新过程和布朗运动.

设 $N_t = Z_t - \int_0^t G(s)\hat{X}_s ds$ 是步骤 2 中定义的更新过程. 回顾假定了 $D(t)$ 在有界区间上是有界的且离开原点. 定义过程 $R_t(\omega)$:

$$dR_t = \frac{1}{D(t)} dN_t(\omega), \quad t \geqslant 0, \ R_0 = 0. \tag{6.2.14}$$

引理 6.2.6 R_t 是一个 1 维的布朗运动.

证明 通过观察有

(i) R_t 有连续路径.

(ii) R_t 有正交增量性 (因为 N_t 有该性质).

(iii) R_t 是 Gauss 的 (因为 N_t 是 Gauss 的).

(iv) $E[R_t] = 0, \ E[R_t R_s] = \min(s,t)$.

下面证明 (iv), $E[R_t]=0$ 是显然的, 由 Itô 公式有

$$d(R_t^2)=2R_tdR_t+(dR_t)^2=2R_tdR_t+dt.$$

由 R_t 的正交增量性有

$$E[R_t^2]=E\left[\int_0^t ds\right]=t.$$

如果 $s<t$, 则有

$$E[R_sR_t]=E[(R_t-R_s)R_s]+E[R_s]^2=E[R_s^2]=s.$$

性质 (i), (iii) 和 (iv) 都是 1 维布朗运动的许多特征之一 (Simon, 1979, 定理 4.3) (另外, 容易导出 R_t 有平稳的独立增量性. 因此由连续性及第 3 章开始之前提及的结论可知它必为布朗运动. 布朗运动的一般特征见推论 8.4.5).

因为

$$\mathcal{L}(N,t)=\mathcal{L}(R,t),$$

可得到

$$\hat{X}_t=\mathcal{P}_{\mathcal{L}(R,t)}(X_t),$$

它表明在空间 $\mathcal{L}(R,t)$ 上的投影能被很好地描述出来 (比较例 6.2.1 中的公式 (6.2.5)).

引理 6.2.7

$$\hat{X}_t=E[X_t]+\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}E[X_tR_s]dR_s. \tag{6.2.15}$$

证明　从引理 6.2.4 可知, 存在某个 $g\in L^2[0,t]$, $c_0(t)\in\mathbf{R}$ 使得

$$\hat{X}_t=c_0(t)+\int_0^t g(s)dR_s.$$

两边取期望可得 $c_0(t)=E[\hat{X}_t]=E[X_t]$. 有

$$(X_t-\hat{X}_t)\perp\int_0^t f(s)dR_s,\quad \forall\, f\in L^2[0,t],$$

因此, 对 $\forall\, f\in L^2[0,t]$,

$$\begin{aligned}E\left[X_t\int_0^t f(s)dR_s\right]&=E\left[\hat{X}_t\int_0^t f(s)dR_s\right]=E\left[\int_0^t g(s)dR_s\int_0^t f(s)dR_s\right]\\&=E\left[\int_0^t g(s)f(s)ds\right]=\int_0^t g(s)f(s)ds,\end{aligned}$$

这里利用了 Itô 等距, 特别对 $r \leqslant t$, 如果选择 $f = \mathcal{X}_{[0,r]}$, 则可得到

$$E[X_t R_r] = \int_0^r g(s)ds,$$

或

$$g(r) = \frac{\partial}{\partial r} E[X_t R_r].$$

这样可得到 (6.2.15) 式, 步骤 3 完成.

步骤 4. 关于 X_t 的一个显式公式.

像第 5 章中的例子一样, 利用 Itô 公式容易求得

$$\begin{aligned} X_t &= \exp\left(\int_0^t F(s)ds\right)\left[X_0 + \int_0^t \exp\left(-\int_0^s F(u)du\right)C(s)dU_s\right] \\ &= \exp\left(\int_0^t F(s)ds\right)X_0 + \int_0^t \exp\left(\int_s^t F(u)du\right)C(s)dU_s. \end{aligned}$$

特别有 $E = [X_t] = E[X_0]\exp\left(\int_0^t F(s)ds\right)$. 更一般地, 如果 $0 \leqslant r \leqslant t$, 则 (见练习 6.12)

$$X_t = \exp\left(\int_r^t F(s)ds\right)X_r + \int_r^t \exp\left(\int_s^t F(u)du\right)C(s)dU_s. \tag{6.2.16}$$

步骤 5. 关于 $\hat{X}_t$ 的随机微分方程.

结合前面的步骤可获得滤波问题即关于 $\hat{X}_t$ 的随机微分方程的解. 先由引理 6.2.7 的公式出发有

$$\hat{X}_t = E[X_t] + \int_0^t f(s,t)dR_s, \tag{6.2.17}$$

这里

$$f(s,t) = \frac{\partial}{\partial s} E[X_t R_s].$$

利用 (6.2.13) 和 (6.2.14) 有

$$R_s = \int_0^s \frac{G(r)}{D(r)}(X_r - \hat{X}_r)dr + V_s,$$

由此有

$$E[X_t R_s] = \int_0^t \frac{G(r)}{D(r)} E[X_t \tilde{X}_r]dr,$$

这里

$$\tilde{X}_r = X_r - \hat{X}_r, \tag{6.2.18}$$

利用公式 (6.2.16) 可得到

$$E[X_t\tilde{X}_r]=\exp\left(\int_r^t F(v)dv\right)E[X_r\tilde{X}_r]=\exp\left(\int_r^t F(v)dv\right)S(r),$$

这里

$$S(r)=E[(\tilde{X}_r)^2], \tag{6.2.19}$$

即在时刻 $r\geqslant 0$, 估计的均方误差. 因此

$$E[X_tR_s]=\int_0^t \frac{G(r)}{D(r)}\exp\left(\int_r^t F(v)dv\right)S(r)dr,$$

由此有

$$f(s,t)=\frac{G(s)}{D(s)}\exp\left(\int_s^t F(v)dv\right)S(s), \tag{6.2.20}$$

另外可证明 $S(t)$ 满足 (确定性的) 微分方程 (即 Riccati 方程)

$$\frac{dS}{dt}=2F(t)S(t)-\frac{G^2(t)}{D^2(t)}S^2(t)+C^2(t), \tag{6.2.21}$$

为了证明 (6.2.21), 由 Pythagorean 定理, (6.2.15) 和 Itô等距可得

$$\begin{aligned}S(t)&=E[(X_t-\hat{X}_t)^2]=E[X_t^2]-2E[X_t\hat{X}_t]+E[\hat{X}_t^2]\\&=E[X_t^2]-E[\hat{X}_t^2]=T(t)-\int_0^t f^2(s,t)ds-(E[X_t])^2,\end{aligned} \tag{6.2.22}$$

这里

$$T(t)=E[X_t^2]. \tag{6.2.23}$$

现在由 (6.2.16) 和 Itô 等距, 有

$$T(t)=\exp\left(2\int_0^t F(s)ds\right)E[X_0^2]+\int_0^t\exp\left(2\int_s^t F(u)du\right)C^2(s)ds.$$

由 X_0 与 $\{U_s\}_{s\geqslant 0}$ 的独立性, 有

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt}=&2F(t)\exp\left(2\int_0^t F(s)ds\right)E[X_0^2]+C^2(t)\\&+\int_0^t 2F(t)\exp\left(2\int_s^t F(u)du\right)C^2(s)ds,\end{aligned}$$

即

$$\frac{dT}{dt} = 2F(t)T(t) + C^2(t), \tag{6.2.24}$$

把它代入 (6.2.22), 并利用步骤 4 可得到

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{dT}{dt} - f^2(t,t) - \int_0^t 2f(s,t)\frac{\partial f(s,t)}{\partial t}ds - 2F(t)(E[X_t])^2 \\ &= 2F(t)T(t) + C^2(t) - \frac{G^2(t)S^2(t)}{D^2(t)} - 2\int_0^t f^2(s,t)F(t)ds - 2F(t)(E[X_t])^2 \\ &= 2F(t)S(t) + C^2(t) - \frac{G^2(t)S^2(t)}{D^2(t)},\end{aligned}$$

此即 (6.2.21). 现在准备求关于 $\hat{X}_t$ 的随机微分方程. 从公式

$$\hat{X}_t = c_0(t) + \int_0^t f(s,t)dR_s, \quad 这里\ c_0(t) = E[X_t]$$

可得

$$d\hat{X}_t = c_0'(t)dt + f(t,t)dR_t + \left(\int_0^t \frac{\partial f(s,t)}{\partial t}dR_s\right)dt, \tag{6.2.25}$$

因为

$$\begin{aligned}&\int_0^u \left(\int_0^t \frac{\partial f(s,t)}{\partial t}dR_s\right)dt = \int_0^u \left(\int_s^u \frac{\partial f(s,t)}{\partial t}dt\right)dR_s \\ =&\int_0^u (f(s,u) - f(s,s))dR_s = \hat{X}_u - c_0(u) - \int_0^u f(s,s)dR_s,\end{aligned}$$

所以

$$d\hat{X}_t = c_0'(t)dt + \frac{G(t)S(t)}{D(t)}dR_t + \left(\int_0^t f(s,t)dR_s\right)F(t)dt.$$

又由 $c_0'(t) = F(t)c_0(t)$(步骤 4). 故它可化为

$$\begin{aligned}d\hat{X}_t &= c_0'(t)dt + F(t)(\hat{X}_t - c_0(t))dt + \frac{G(t)S(t)}{D(t)}dR_t \\ &= F(t)\hat{X}_t dt + \frac{G(t)S(t)}{D(t)}dR_t.\end{aligned} \tag{6.2.26}$$

把 $dR_t = \frac{1}{D(t)}[dZ_t - G(t)\hat{X}_t dt]$ 代入上式可得

$$d\hat{X}_t = \left(F(t) - \frac{G^2(t)S(t)}{D^2(t)}\right)\hat{X}_t dt + \frac{G(t)S(t)}{D^2(t)}dZ_t. \tag{6.2.27}$$

因此

定理 6.2.8(1 维 Kalman-Bucy 滤波问题) 1 维线性滤波问题

$$\begin{aligned}&(\text{线性系统}) \quad dX_t = F(t)X_t dt + C(t)dU_t, \quad F(t),\ C(t) \in \mathbf{R},\\&(\text{线性观测}) \quad dZ_t = G(t)X_t dt + D(t)dV_t, \quad G(t),\ D(t) \in \mathbf{R}\end{aligned}$$

的解 $\hat{X}_t = E[X_t|\mathcal{G}_t]$, 满足随机微分方程

$$d\hat{X}_t = \left(F(t) - \frac{G^2(t)S(t)}{D^2(t)}\right)\hat{X}_t dt + \frac{G(t)S(t)}{D^2(t)}dZ_t, \quad \hat{X}_0 = E[X_0], \tag{6.2.28}$$

这里

$$S(t) = E[(X_t - \hat{X}_t)^2]$$

满足 (确定性的)Riccati 方程

$$\frac{dS}{dt} = 2F(t)S(t) - \frac{G^2(t)}{D^2(t)}S^2(t) + C^2(t), \quad S(0) = E[(X_0 - E[X_0])^2]. \tag{6.2.29}$$

例 6.2.9(常数过程的噪声观测) 考虑简单的情形

$$\begin{aligned}&(\text{系统}) \qquad dX_t = 0, \text{即} X_t = X_0; \quad E[X_0] = \hat{X}_0, \quad E[X_0^2] = a^2,\\&(\text{观测}) \qquad dZ_t = X_t dt + m dV_t; \quad Z_0 = 0,\end{aligned}$$

对应于

$$H_t = \frac{dZ}{dt} = X_t + mW_t, \quad W_t = \text{白噪声},$$

先求相应的 Riccati 方程, 由 $S(t) = E[(X_t - \hat{X}_t)^2]$ 有

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{1}{m^2}S^2, \quad S_0 = a^2,$$

即

$$S(t) = \frac{a^2m^2}{m^2 + a^2t}, \quad t \geqslant 0,$$

这样给出关于 $\hat{X}_t$ 的方程

$$d\hat{X}_t = -\frac{a^2}{m^2 + a^2t}\hat{X}_t dt + \frac{a^2}{m^2 + a^2t}dZ_t, \quad \hat{X}_0 = E[X_0] = 0$$

或

$$d\left(\hat{X}_t \exp\left(\int_0^t \frac{a^2}{m^2 + a^2s}ds\right)\right) = \exp\left(\int_0^t \frac{a^2}{m^2 + a^2s}ds\right)\frac{a^2}{m^2 + a^2t}dZ_t.$$

可求出

$$\hat{X}_t = \frac{m^2}{m^2+a^2t}\hat{X}_0 + \frac{a^2}{m^2+a^2t}Z_t, \quad t \geqslant 0. \tag{6.2.30}$$

这可看成例 6.2.1 的连续形式.

例 6.2.10(布朗运动的噪声观测) 如果对上一个例子稍作修改使得

$$\begin{aligned}
&(\text{系统}) \quad dX_t = cdU_t, \quad E[X_0]=0,\ E[X_0^2]=a^2, \quad c\ \text{为常数}, \\
&(\text{观测}) \quad dZ_t = X_t dt + m dV_t,
\end{aligned}$$

Ricaati 方程为

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{1}{m^2}S^2 + c^2, \quad S_0 = a^2$$

或

$$\frac{m^2 dS}{m^2c^2 - S^2} = dt \quad (S \neq mc).$$

由此得出

$$\left|\frac{mc+S}{mc-S}\right| = K\exp\left(\frac{2ct}{m}\right), \quad K = \left|\frac{mc+a^2}{mc-a^2}\right|,$$

解得

$$S(t) = \begin{cases}
mc\dfrac{K\exp\left(\dfrac{2ct}{m}\right)-1}{K\exp\left(\dfrac{2ct}{m}\right)+1}, & \text{如果 } S(0) < mc, \\
mc(\text{常数}), & \text{如果 } S(0) = mc, \\
mc\dfrac{K\exp\left(\dfrac{2ct}{m}\right)+1}{K\exp\left(\dfrac{2ct}{m}\right)-1}, & \text{如果 } S(0) > mc.
\end{cases}$$

在此三种情形下, 当 $t\to\infty$ 时, 均方误差 $S(t)$ 都趋向于 mc.

为简单起见, 设 $a=0$, $m=c=1$, 那么

$$S(t) = \frac{\exp(2t)-1}{\exp(2t)+1} = \tanh(t),$$

关于 $\hat{X}_t$ 的方程是

$$d\hat{X}_t = -\tanh(t)\hat{X}_t dt + \tanh(t) dZ_t, \quad \hat{X}_0 = 0$$

或

$$d(\cosh(t)\hat{X}_t) = \sinh(t) dZ_t,$$

因此

$$\hat{X}_t = \frac{1}{\cosh(t)} \int_0^t \sinh(s) dZ_s.$$

回想到 Z_t 的意义

$$Z_t = \int_0^t H_s ds,$$

这里 H_s 是"原始的"观测值 (见 (6.1.4)), 可写成

$$\hat{X}_t = \frac{1}{\cosh(t)} \int_0^t \sinh(s) H_s ds. \tag{6.2.31}$$

因此, $\hat{X}_t$ 可近似地 (对足够大的 t) 看成观测值 H_s 的加权平均, 且随着时间的递增, 观测值的权重更大.

附注 把公式 (6.2.31) 与已经建立的预报公式进行比较是有趣的. 例如, 由 Holt 于 1958 年建立的指数加权运动平均表示为

$$\tilde{X}_n = (1-\alpha)^n Z_0 + \alpha \sum_{k=1}^{n} (1-\alpha)^{n-k} Z_k,$$

这里 α 为某个常数, 且 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. 这个可以写成

$$\tilde{X}_n = \beta^{-n} Z_0 + (\beta - 1)\beta^{-n-1} \sum_{k=1}^{n} \beta^k Z_k,$$

这里 $\beta = \dfrac{1}{1-\alpha}$(假定 $\alpha < 1$), 它是 (6.2.31) 的离散情形, 或更准确地说, 对应于 (6.2.31) 式的一般情形下 (即 $a \neq 0$, m, c 也不必为 1) 的离散情形.

例 6.2.11(参数的估计) 假设依靠观测值 Z_t 要估计一个 (常数) 参数 θ 的值, Z_t 满足模型

$$dZ_t = \theta M(t) dt + N(t) dB_t,$$

这里 $M(t)$, $N(t)$ 是已知的函数. 此时关于 θ 的随机微分方程显然是

$$d\theta = 0,$$

因此关于 $S(t) = E[(\theta - \hat{\theta}_t)^2]$ 的 Riccati 方程是

$$\frac{dS}{dt} = -\left(\frac{M(t)S(t)}{N(t)}\right)^2,$$

从而解出

$$S(t) = \left(S_0^{-1} + \int_0^t M^2(s) N^{-2}(s) ds\right)^{-1}.$$

而 Kalman-Bucy 滤波器是

$$d\hat{\theta}_t = \frac{M(t)S(t)}{N^2(t)}(dZ_t - M(t)\hat{\theta}_t dt),$$

这个可写成

$$\left(S_0^{-1} + \int_0^t M^2(s)N^{-2}(s)ds\right)d\hat{\theta}_t + M^2(t)N^{-2}(t)\hat{\theta}_t dt = M(t)N^{-2}(t)dZ_t,$$

而它的左边是

$$d\left(\left(S_0^{-1} + \int_0^t M^2(s)N^{-2}(s)ds\right)\hat{\theta}_t\right),$$

因此可得到

$$\hat{\theta}_t = \frac{\hat{\theta}_0 S_0^{-1} + \int_0^t M(s)N^{-2}(s)dZ_s}{S_0^{-1} + \int_0^t M^2(s)N^{-2}(s)ds}.$$

如果 $S_0^{-1} = 0$, 这个估计与典型的估计理论中的极大自然估计是一致的 (Liptser, Shiryaev, 1978). 对扩散和更一般化的漂移参数方面的估计的更多信息可参考文献 (Aase, 1982; Brown, Hewitt, 1975; Taraskin, 1974).

例 6.2.12(人口增长的噪声观测) 考虑一个简单的增长模型 (r 为常数)

$$dX_t = rX_t dt, \quad E[X_0] = b > 0, \quad E[(X_0 - b)^2] = a^2,$$

观测方程

$$dZ_t = X_t dt + m dV_t, \quad m \text{ 为常数},$$

相应的 Riccati 方程为

$$\frac{dS}{dt} = 2rS - \frac{1}{m^2}S^2, \quad S(0) = a^2,$$

得出逻辑斯谛曲线

$$S(t) = \frac{2rm^2}{1 + Ke^{-2rt}}, \quad \text{这里 } K = \frac{2rm^2}{a^2} - 1,$$

因此, 关于 $\hat{X}_t$ 的方程变为

$$d\hat{X}_t = \left(r - \frac{S}{m^2}\right)\hat{X}_t dt + \frac{S}{m^2}dZ_t, \quad \hat{X}_0 = E[X_0] = b,$$

为简单起见, 假定 $a^2 = 2rm^2$, 因此对任意的 t,

$$S(t) = 2rm^2.$$

在一般情形, 当 $t \to \infty$ 时, 有 $S(t) \to 2rm^2$. 因此对足够大的 t, 这是一个合理的近似. 然后得到

$$d(\exp(rt)\hat{X}_t) = \exp(rt)2rdZ_t, \quad \hat{X}_0 = b$$

或

$$\hat{X}_t = \exp(-rt)\left[\int_0^t 2r\exp(rs)dZ_s + b\right].$$

像例 6.2.10 一样, 如果 $Z_t = \int_0^t H_s ds$, 则它可写成

$$\hat{X}_t = \exp(-rt)\left[\int_0^t 2r\exp(rs)H_s ds + b\right]. \tag{6.2.32}$$

比如, 假定对 $0 \leqslant s \leqslant t$, $H_s = \beta$(常数), 即观测值 (由于某种原因) 在所有的时间 $s \leqslant t$, 都给出同样的值 β. 那么当 $t \to \infty$ 时, 有

$$\hat{X}_t = 2\beta - (2\beta - b)\exp(-rt) \to 2\beta.$$

而如果 $H_s = \beta\exp(\alpha s)$, $s \geqslant 0$, (α 为常数). 得到

$$\begin{aligned}\hat{X}_t &= \exp(-rt)\left[\frac{2r\beta}{r+\alpha}(\exp(r+\alpha)t - 1) + b\right]\\ &\approx \frac{2r\beta}{r+\alpha}\exp(\alpha t), \quad \text{对足够大的 } t.\end{aligned}$$

因此只有当 $\alpha = r$, 即 $H_s = \beta\exp(rs)$, $s \geqslant 0$ 时, 滤波器才会在长时期之后相信观察值. 而只有当 $\alpha = r$ 且 $\beta = b$, 即 $H_s = b\exp(rs)$, $s \geqslant 0$ 时, 滤波器才会在所有的时间内相信观察值.

例 6.2.13(常系数一般讨论) 考虑系统

$$dX_t = FX_t dt + CdU_t, \quad F,\ C\text{为常数} \neq 0,$$

观测值

$$dZ_t = GX_t dt + DdV_t, \quad G,\ D\text{为常数} \neq 0,$$

相应的 Riccati 方程

$$S' = 2FS - \frac{G^2}{D^2}S^2 + C^2, \quad S(0) = a^2$$

有解

$$S(t) = \frac{\alpha_1 - K\alpha_2\exp\left(\dfrac{(\alpha_2-\alpha_1)G^2 t}{D^2}\right)}{1 - K\exp\left(\dfrac{(\alpha_2-\alpha_1)G^2 t}{D^2}\right)},$$

这里

$$\alpha_1 = G^{-2}(FD^2 - D\sqrt{F^2D^2 + G^2C^2}),$$
$$\alpha_2 = G^{-2}(FD^2 + D\sqrt{F^2D^2 + G^2C^2}),$$
$$K = \frac{a^2 - \alpha_1}{a^2 - \alpha_2},$$

得出关于 $\hat{X}_t$ 的解的形式

$$\hat{X}_t = \exp\left(\int_0^t H(s)ds\right)\hat{X}_0 + \frac{C}{D^2}\int_0^t \exp\left(\int_s^t H(u)du\right)S(s)dZ_s,$$

这里

$$H(s) = F - \frac{G^2}{D^2}S(s).$$

对足够大的 s, 有 $S(s) \approx \alpha_2$, 这样有

$$\begin{aligned}\hat{X}_t &\approx \hat{X}_0 \exp\left(\left(F - \frac{G^2\alpha_2}{D^2}\right)t\right) + \frac{G\alpha_2}{D^2}\int_0^t \exp\left(\left(F - \frac{G^2\alpha_2}{D^2}\right)(t-s)\right)dZ_s \\ &= \hat{X}_0 \exp(-\beta t) + \frac{G\alpha_2}{D^2}\exp(-\beta t)\int_0^t \exp(\beta s)dZ_s,\end{aligned} \tag{6.2.33}$$

这里 $\beta = D^{-1}\sqrt{F^2D^2 + G^2C^2}$, 因此可近似地得出与上个例子同样的表现.

6.3 高维线性滤波问题

最后求 n 维线性滤波问题 (6.2.1), (6.2.2) 的解的公式.

定理 6.3.1(高维 Kalman-Bucy 滤波器) 高维线性滤波问题

$$(\text{线性系统})\quad dX_t = F(t)X_tdt + C(t)dU_t, \quad F(t) \in \mathbf{R}^{n\times n},\ C(t) \in \mathbf{R}^{n\times p}, \tag{6.3.1}$$

$$(\text{线性观测})\quad dZ_t = G(t)X_tdt + D(t)dV_t, \quad G(t) \in \mathbf{R}^{m\times n},\ D(t) \in \mathbf{R}^{m\times r} \tag{6.3.2}$$

的解 $\hat{X}_t = E[X_t|\mathcal{G}_t]$ 满足随机微分方程

$$d\hat{X}_t = (F - SG^T(DD^T)^{-1}G)\hat{X}_tdt + SG^T(DD^T)^{-1}dZ_t, \quad \hat{X}_0 = E[X_0], \tag{6.3.3}$$

这里 $S(t) := E[(X_t - \hat{X}_t)(X_t - \hat{X}_t)^T] \in \mathbf{R}^{n\times n}$, 满足矩阵 Riccati 方程

$$\begin{aligned}&\frac{dS(t)}{dt} = FS + SF^T - SG^T(DD^T)^{-1}GS + CC^T, \\ &S(0) = E[(X_0 - E[X_0])(X_0 - E[X_0])^T].\end{aligned} \tag{6.3.4}$$

关于 $D(t) \in \mathbf{R}^{m\times r}$ 应满足的条件现在改为对任意的 t, $D(t)D(t)^T$ 是可逆的, 且 $(D(t)D(t)^T)^{-1}$ 在每个 t 的有界区间上是有界的.

对更一般的形式

$$(\text{系统})\quad dX_t = [F_0(t) + F_1(t)X_t + F_2(t)Z_t]dt + C(t)dU_t, \tag{6.3.5}$$

$$(\text{观测})\quad dZ_t = [G_0(t) + G_1(t)X_t + G_2(t)Z_t]dt + D(t)dV_t, \tag{6.3.6}$$

这里 $X_t \in \mathbf{R}^n$, $Z_t \in \mathbf{R}^m$, $B_t = (U_t, V_t)$ 是 $n+m$ 维布朗运动, 矩阵系数为适当维数, 可得到一个类似的解 (Bensoussan, 1992; KallianPur, 1980), 它同时对非线性情形也进行了讨论. Pardouz(1979) 和 Davis(1984) 也给出了非线性滤波理论. 关于比布朗运动更一般的过程 (正交增量过程) 驱动的线性滤波问题的解可参考文献 (Davis, 1977). 滤波理论的各种应用见文献 (Bucy, Joseph, 1968; Jazwinski, 1970; Gelb, 1974; Maybeck, 1979) 及这些书的参考文献.

练　习

6.1. (常数的时间变化观测) 证明: 如果 (1 维) 系统是

$$dX_t = 0, E[X_0] = 0, \quad E[X_0^2] = a^2$$

观测过程是

$$dZ_t = G(t)X_t dt + dV_t, \quad Z_0 = 0,$$

那么 $S(t) = E[(X_t - \hat{X}_t)^2]$ 有表示

$$S(t) = \frac{1}{\dfrac{1}{S(0)} + \displaystyle\int_0^t G^2(s)ds}. \tag{6.3.7}$$

如果 $t \to \infty$ 时, 有 $S(t) \to 0$, 即如果 $\displaystyle\int_0^\infty G^2(s)ds = \infty$, 则称有正合渐近估计. 因此对 $G(s) = \dfrac{1}{(1+s)^p}$ ($p > 0$ 常数), 当且仅当 $p \leqslant \dfrac{1}{2}$ 时有正合渐近估计.

6.2. 考虑系统中没有噪声的 1 维线性滤波问题

$$(\text{系统})\quad dX_t = F(t)X_t dt, \tag{6.3.8}$$

$$(\text{观测})\quad dZ_t = G(t)X_t dt + D(t)dV_t. \tag{6.3.9}$$

像通常一样, $S(t) = E[(X_t - \hat{X}_t)^2]$, 且假定 $S(0) > 0$.

a) 证明

$$R(t) := \frac{1}{S(t)}$$

满足线性的微分方程:

$$R'(t) = -2F(t)R(t) + \frac{G^2(t)}{D^2(t)}, \quad R(0) = \frac{1}{S(0)}. \tag{6.3.10}$$

b) 利用 (6.3.10) 证明对滤波问题 (6.3.8), (6.3.9) 有

$$\frac{1}{S(t)} = \frac{1}{S(0)} \exp\left(-2\int_0^t F(s)ds \right) + \int_0^t \exp\left(-2\int_s^t F(u)du \right) \frac{G^2(s)}{D^2(s)} ds. \tag{6.3.11}$$

6.3. 在例 6.2.12 中发现, 当 $t \to \infty$ 时, $S(t) \to 2rm^2$. 因此不可能存在 X_t 的正合渐近估计 (练习 6.1). 然而在下面的意义下

$$E[(X_0 - E[X_0|\mathcal{G}_t])^2] \to 0, \quad 当\ t \to \infty.$$

证明可获得关于 X_0 的正合渐近估计. 提示: 注意 $X_0 = e^{-rt}X_t$. 因此, $E[X_0|\mathcal{G}_t] = e^{rt}\hat{X}_t$, 故可得

$$E[(X_0 - E[X_0|\mathcal{G}_t])^2] = e^{-2rt}S(t).$$

6.4. 考虑系统中没有噪声的多维线性滤波问题

$$(线性系统) \quad dX_t = F(t)X_t dt, \quad X_t \in \mathbf{R}^n,\ F(t) \in \mathbf{R}^{n\times n}, \tag{6.3.12}$$

$$(线性观测) \quad dZ_t = G(t)X_t dt + D(t)dV_t, \quad G(t) \in \mathbf{R}^{m\times n},\ D(t) \in \mathbf{R}^{m\times r}. \tag{6.3.13}$$

假定 $S(t)$ 是非奇异的, 且定义 $R(t) = S^{-1}(t)$, 证明 $R(t)$ 满足 Lyapunov 方程 (与练习 6.2 进行比较)

$$R'(t) = -R(t)F(t) - F(t)^T R(t) + G(t)^T (D(t)D(t)^T)^{-1} G(t). \tag{6.3.14}$$

提示: 因为 $S(t)S^{-1}(t) = I$, 有 $S'(t)S^{-1}(t) + S(t)(S^{-1})'(t) = 0$, 可得出

$$(S^{-1})'(t) = -S^{-1}(t)S'(t)S^{-1}(t).$$

6.5. (预报) 在预报问题中, 基于时刻 t 之前的观测信息 $\mathcal{G}_t$, 寻求在将来 T 时刻系统 X 的估计值. 证明在线性模型 (6.2.3), (6.2.4) 中预报值的 $E[X_T|\mathcal{G}_t], T > t$ 的表达式为

$$E[X_T|\mathcal{G}_t] = \exp\left(\int_t^T F(s)ds \right) \cdot \hat{X}_t. \tag{6.3.15}$$

提示: 利用公式 (6.2.16).

6.6. (插值/平滑) 给出直到时刻 t 的观测值 $\mathcal{G}_t$, 对时刻 $s < t$, 估计系统 X 的值, 这类问题称之为插值或平滑问题. 采用如 (6.2.1), (6.2.2) 一样的记号. 证明 $M_s := E[X_s|\mathcal{G}_t]$ 满足微分方程 (Davis, 1977, 定理 4.4.4)

$$\begin{cases} \dfrac{dM_s}{ds} = F(s)M_s + C(s)C^T(s)S^{-1}(s)(M_s - \hat{X}_s), \quad s < t, \\ M_t = \hat{X}_t. \end{cases} \tag{6.3.16}$$

利用它求例 6.2.9 中的 $E[X_s|\mathcal{G}_t]$.

6.7. 考虑系统

$$dX_t = \begin{pmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E[X_0] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

观测

$$\begin{pmatrix} dZ_1(t) \\ dZ_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 + X_2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} dV_1(t) \\ dV_2(t) \end{pmatrix}.$$

应用练习 6.4 中 (6.3.14) 式证明：$S(t) := E[(X_t - \hat{X}_t)(X_t - \hat{X}_t)^T]$ 由下式给出

$$S^{-1}(t) = S^{-1}(0) + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} t.$$

如果 $S(t)$ 对任意的 t 都可逆. 证明：

$$d\hat{X}_t = -S(t) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \hat{X}_t dt + S(t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dZ_t.$$

6.8. 利用 (6.1.3) 把下面的 Stratonovich 方程

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t) \circ dB_t$$

转换成相应的 Itô 方程

$$dX_t = \tilde{b}(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t.$$

a) $\begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ X_2 + e^{2X_1} \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{X_1} \end{pmatrix} \circ dB_t, \quad B_t \in \mathbf{R}.$

b) $\begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \end{pmatrix} \circ dB_t, \quad B_t \in \mathbf{R}.$

6.9. 利用 (6.1.3)(的逆) 把下面的 Itô 方程

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

转换成相应的 Stratonovich 方程

$$dX_t = \hat{b}(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t) \circ dB_t.$$

a) $dX_t = -\frac{1}{2}X_t dt + KX_t dB_t$, 这里

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_t = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2, \quad B_t \in \mathbf{R},$$

即 X_t 是单位圆上的布朗运动 (例 5.1.4).

b) $\begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & -X_2 \\ X_2 & X_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_1 \\ dB_2 \end{pmatrix}$.

6.10. (Itô 扩散的支集)$\mathbf{R}^n$ 中初始值 $x \in \mathbf{R}^n$ 的 Itô扩散 X 的支集, 是最小的闭集 F 使得对任意的 $t \geqslant 0$, 及几乎所有的 ω, $X_t(\omega) \in F$.

在例 5.1.4 中可发现单位圆上的布朗运动 X_t, 满足 (Itô) 随机微分方程

$$\begin{pmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} dB_t. \tag{6.3.17}$$

从这个方程并不能显然看出它的解与它的初始点位于同一圆上. 然而它可以通过下面的程序而被察觉到. 首先把方程转换成它的 Stratonovich 形式, 在练习 6.9 中知道其为

$$\begin{pmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} \circ dB_t, \tag{6.3.18}$$

然后 (形式地) 用 $\phi'(t)dt$ 取代 $\circ dB_t$, 这里 ϕ 是某个光滑 (确定性的) 函数, $\phi(0) = 0$. 这样得到确定性的方程:

$$\begin{pmatrix} dX_1^{(\phi)}(t) \\ dX_2^{(\phi)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \phi'(t)dt. \tag{6.3.19}$$

如果 $(X_1^{(\phi)}(0),\ X_2^{(\phi)}(0)) = (1, 0)$. 则 (6.3.19) 的解是

$$\begin{pmatrix} X_1^{(\phi)}(t) \\ X_2^{(\phi)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi(t) \\ \sin\phi(t) \end{pmatrix}.$$

因此对任何光滑函数 ϕ, (6.3.19) 的相应解 $X^{(\phi)}(t)$ 的支集都在单位圆上. 由 Strook-Varadhan 支集定理可推出原解 $X(t,\omega)$ 的支集在单位圆上. 该定理表明很一般的 Itô 扩散 $X_t(\omega)$ 的支集与 $\{X^{(\phi)}(\cdot);\ \phi\text{光滑}\}$, 在 $\mathbf{R}^n$ 中的闭包是一致的. 这里 $X^{(\phi)}(t)$ 是由上面同样的方法, 用 $\phi'(t)dt$ 取代 $\circ dB_t$ 而获得的 (Ikeda, Watanabe, 1989, 定理 VI,8.1) (在上面的这个特殊情形直接从 (6.3.18) 也可看出它的支集). 利用上面的方法, 求下面给出的过程 $X_t \in \mathbf{R}^2$ 的支集

$$dX_t = \frac{1}{2}X_t dt + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X_t dB_t.$$

6.11. 考虑例子 6.2.1, 但现在没有假定 $E[X] = 0$, 证明

$$\hat{X}_k = \frac{m^2}{ka^2 + m^2}E[X] + \frac{a^2}{a^2 + \frac{1}{k}m^2}\bar{Z}_k, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

这里 $a^2 = E[(X - E[X])^2]$ (与 (6.2.8) 比较). 提示: 设 $\xi = X - E[X]$, $\xi_k = Z_k - E[X]$, 然后应用 (6.2.8) 且用 ξ 取代 X, 用 ξ_k 取代 Z_k.

6.12. 证明公式 (6.2.16), 提示: $\exp\left(-\int_r^s F(u)du\right)$ 是随机微分方程 (6.2.3) 的积分因子.

6.13. 考虑一维线性滤波问题 (6.2.3), (6.2.4). 求 $E[\hat{X}_t]$ 和 $E[(\hat{X}_t)^2]$. 提示: 利用定理 6.1.2 且利用均方误差 $S(t)$ 的定义.

6.14. 设 B_t 为 1 维布朗运动.

a) 给出关于过程 Z_t 的一个例子, 其中 Z_t 的形式为

$$dZ_t = u(t,\omega)dt + dB_t,$$

使得 Z_t 是一个关于 P 的布朗运动, 且 $u(t,\omega) \in \mathcal{V}$ 不恒为 0. 提示: 选择 Z_t 是一个线性滤波问题中的更新过程, 其中 $D(t) \equiv 1$.

b) 证明由 a) 中过程 Z_t 生成的流 $\{\mathcal{Z}_t\}_{t\geqslant 0}$, 必定严格包含于 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$, 即证明 $\mathcal{Z}_t \subseteq \mathcal{F}_t$, 对任意的 t 成立, 且 $\mathcal{Z}_t \neq \mathcal{F}_t$, 对某个 t 成立. 提示: 利用练习 4.12.

6.15.* 假定在 t 时刻状态 $X_t \in \mathbf{R}$ 是由下式给出的一个几何布朗运动

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \quad X_0 = x > 0, \tag{6.3.20}$$

这里 $\sigma \neq 0$ 和 x 都是已知的常数, 参数 μ 也是常数, 但不知它的具体值, 只知它的概率分布. 假定为正态分布, 均值为 $\bar{\mu}$, 方差为 a^2. 假定 μ 是与 $\{B_s\}_{s\geqslant 0}$ 独立的, 且 $E[\mu^2] < \infty$.

假设可在所有的时间 t 内观察到 X_t 的值, 因此有 X_s; $s \leqslant t$ 生成的信息集 (σ 代数)$\mathcal{M}_t$, 设 $\mathcal{N}_t$ 是由 ξ_s, $s \leqslant t$ 生成的 σ 代数, 这里

$$d\xi_t = \mu dt + \sigma dB_t, \quad \xi_0 = x. \tag{6.3.21}$$

a) 证明 $\mathcal{M}_t = \mathcal{N}_t$.

b) 证明

$$E[\mu|\mathcal{N}_t] = (\theta + \sigma^{-2}t)^{-1}(\bar{\mu}\theta + \sigma^{-2}\xi_t), \tag{6.3.22}$$

这里

$$\theta = E[(\mu - \bar{\mu})^2]^{-1}, \quad \bar{\mu} = E[\mu]. \tag{6.3.23}$$

c) 定义

$$\tilde{B}_t = \int_0^t \sigma^{-1}(\mu - E[\mu|\mathcal{M}_s])ds + B_t, \tag{6.3.24}$$

证明 $\tilde{B}_t$ 是布朗运动.

d) 证明对所有的 t, $\tilde{B}_t$ 是 $\mathcal{M}_t$ 可测的, 因此

$$\tilde{\mathcal{F}}_t \subseteq \mathcal{M}_t, \tag{6.3.25}$$

这里 $\tilde{\mathcal{F}}_t$ 是由 $\tilde{B}_s$, $s \leqslant t$ 生成的 σ 代数.

e) 证明对所有的 t, ξ_t 是 $\tilde{\mathcal{F}}_t$ 可测的. 结合 a), d) 得到

$$\tilde{\mathcal{F}}_t = \mathcal{M}_t = \mathcal{N}_t = \mathcal{F}_t.$$

f) 证明

$$dX_t = E[\mu|\mathcal{M}_t]X_t dt + \sigma X_t d\tilde{B}_t,$$

注意在这个 X_t 的表达式中, 所有的系数都是可观察到的.

6.16. 重做练习 6.15, 但这里 X_t 是一个均值–回复 Ornstein-Uhlenbeck 过程, 形式为

$$dX_t = (\mu - \rho X_t)dt + \sigma dB_t, \quad X_0 = x \in \mathbf{R},$$

这里 ρ, $\sigma \neq 0$, x 都是已知的常数, 如前一样 μ 为未知常数. 推出 X_t 有下面的表示形式

$$dX_t = (E[\mu|\mathcal{M}_t] - \rho X_t)dt + \sigma d\tilde{B}_t.$$

第 7 章　扩散过程：基本性质

7.1　Markov 性

假定要描述在流动液体中的一个小悬浮粒子遭到随机分子碰撞的运动. 如果 $b(t,x) \in \mathbf{R}^3$ 是液体在点 x 处 t 时刻的速度, 那么粒子在时刻 t, 位于 X_t 的一个合理的数学模型是如下形式的随机微分方程:

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)W_t, \tag{7.1.1}$$

这里 $W_t \in \mathbf{R}^3$ 表示“白噪声”, $\sigma(t,x) \in \mathbf{R}^{3\times 3}$. 这个方程的 Itô 解释是

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \tag{7.1.2}$$

这里 B_t 是 3 维布朗运动, Stratonovich 解释类似 (对 b 添加一个适当的项, 见 (6.1.3)).

对如下形式的随机微分方程

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \tag{7.1.3}$$

这里 $X_t \in \mathbf{R}^n$, $b(t,x) \in \mathbf{R}^n$, $\sigma(t,x) \in \mathbf{R}^{n\times m}$, B_t 是 m 维布朗运动. 称 b 为漂移系数, σ 或有时候 $\frac{1}{2}\sigma\sigma^T$ 为扩散系数 (见定理 7.3.3).

因此, 随机微分方程的解可以被认为是流动液体中的微小粒子运动的数学描述, 这样的随机过程称为 Itô 扩散. 本章将建立 Itô 扩散的某些最基本的性质和结果.

这些给后面几章中的应用提供了必要的背景知识.

定义 7.1.1　一个 (时齐的)Itô 扩散是一个随机过程, $X_t(\omega) = X(t,\omega) : [0,\infty)\times\Omega \to \mathbf{R}^n$, 满足如下形式的随机微分方程

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad t \geqslant s, \ X_s = x, \tag{7.1.4}$$

这里 B_t 是一个 m 维布朗运动. $b : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $\sigma : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n\times m}$ 满足定理 5.2.1 的条件. 此时它可简化为

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leqslant D|x - y|, \quad x, \ y \in \mathbf{R}^n, \tag{7.1.5}$$

即 $b(\cdot)$ 与 $\sigma(\cdot)$ 是 Lipschitz 连续的. 记 (7.1.4) 的 (唯一) 解为 $X_t = X_t^{s,x}$; $t \geqslant s$. 如果 $s=0$, 把 $X_t^{0,x}$ 简记为 X_t^x. 注意在 (7.1.4) 中已假定了 b 和 σ 只依赖于 x 而与 t 无关. 在 (第 10,11 章) 一般情形下归约成这种情形, 得到的过程 $X_t(\omega)$ 在下述意义下将具有时齐性:

$$\begin{aligned} X_{s+h}^{s,x} &= x + \int_s^{s+h} b(X_u^{s,x})du + \int_s^{s+h} \sigma(X_u^{s,x})dB_u \\ &= x + \int_0^h b(X_{s+v}^{s,x})dv + \int_0^h \sigma(X_{s+v}^{s,x})d\tilde{B}_v, \quad u = s+v, \end{aligned} \tag{7.1.6}$$

这里 $\tilde{B}_v = B_{s+v} - B_s$; $v \geqslant 0$(见练习 2.12). 另一方面, 有

$$X_h^{0,x} = x + \int_0^h b(X_v^{0,x})dv + \int_0^h \sigma(X_v^{0,x})dB_v,$$

因为 $\{\tilde{B}_v\}_{v\geqslant 0}$ 和 $\{B_v\}_{v\geqslant 0}$ 有相同的 P^0 分布. 由随机微分方程

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad X_0 = x$$

的解的弱唯一性 (引理 5.3.1) 知, $\{X_{s+h}^{s,x}\}_{h\geqslant 0}$ 和 $\{X_h^{0,x}\}_{h\geqslant 0}$ 有相同的 P^0 分布, 即 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 是时齐的.

现在引入在 Markov 过程中常用的 (且便利的) 一些概念.

记 Q^x 表示给定的初始值 $X_0 = x \in \mathbf{R}^n$, (时齐的)Itô 扩散 $\{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 的概率律. 相对于 Q^x 的期望记为 $E^x[\cdot]$. 因此对任意有界的 Borel 函数 $f_1, \cdots, f_k$, 及任意的时间 $t_1, \cdots, t_k \geqslant 0$; $k = 1, 2, \cdots$ 有

$$E^x[f_1(X_{t_1})\cdots f_k(X_{t_k})] = E[f_1(X_{t_1}^x)\cdots f_k(X_{t_k}^x)], \tag{7.1.7}$$

这里 $E = E_P$ 表示相对于 $B_0 = 0, \{B_t\}_{t\geqslant 0}$ 的概率律 $P = P^0$ 的期望 (见 2.2 节).

像以前一样, 记 $\mathcal{F}_t^{(m)}$ 是由 $\{B_r;\ r \leqslant t\}$ 生成的 σ 代数, $\mathcal{M}_t$ 表示由 $\{X_r;\ r \leqslant t\}$ 生成的 σ 代数. 在前面已有 (定理 5.2.1), X_t 是关于 $\mathcal{F}_t^{(m)}$ 可测的, 因此 $\mathcal{M}_t \subseteq \mathcal{F}_t^{(m)}$.

现在证明 X_t 满足重要的 Markov 性. 给定了直到时刻 t 之前的所有信息, 过程将来的表现, 与给定了初始时刻 t 位于 X_t, 过程将来的表现是相同的. 它的精确的数学公式表示如下:

定理 7.1.2(Itô 扩散的 Markov 性) 设 f 是从 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}$ 的有界 Borel 函数. 那么对 $t,\ h \geqslant 0$,

$$E^x[f(X_{t+h})|\mathcal{F}_t^{(m)}](\omega) = E^{X_t(\omega)}[f(X_h)] \tag{7.1.8}$$

(见附录 B 关于条件期望的定义和基本性质). 这里和下面, E^x 都表示相对于概率测度 Q^x 的期望. 因此 $E^y[f(X_h)]$ 意味着 $E[f(X_h^y)]$, 这里 E 表示相对于测度 P^0 的期望. 右手边表示函数 $E^y[f(X_h)]$ 在 $y = X_t(\omega)$ 的值.

证明　因为对 $r \geqslant t$,

$$X_r(\omega) = X_t(\omega) + \int_t^r b(X_u)du + \int_t^r \sigma(X_u)dB_u.$$

由唯一性有

$$X_r(\omega) = X_r^{t,X_t}(\omega),$$

换句话说, 如果定义 $F(x,t,r,\omega) = X_r^{t,x}(\omega)$. 对 $r \geqslant t$, 有

$$X_r(\omega) = F(X_t,t,r,\omega). \tag{7.1.9}$$

注意 $\omega \to F(x,t,r,\omega)$ 与 $F_t^{(m)}$ 独立, 利用 (7.1.9) 可重写 (7.1.8) 为

$$E[f(F(X_t,t,t+h,\omega))|\mathcal{F}_t^{(m)}] = E[f(F(x,0,h,\omega))]_{x=X_t}. \tag{7.1.10}$$

记 $g(x,\omega) = f \circ F(x,t,t+h,\omega)$, 则 $(x,\omega) \to g(x,\omega)$ 是可测的 (见练习 7.6). 因此可由下面形式的函数逐点有界近似 g,

$$\sum_{k=1}^n \phi_k(x)\psi_k(\omega).$$

利用条件期望的性质 (见附录 B), 得到

$$\begin{aligned}
E[g(X_t,\omega)|\mathcal{F}_t^{(m)}] &= E\left[\lim \sum \phi_k(X_t)\psi_k(\omega)|\mathcal{F}_t^{(m)}\right] \\
&= \lim \sum \phi_k(X_t)E[\psi_k(\omega)|\mathcal{F}_t^{(m)}] \\
&= \lim \sum E[\phi_k(y)\psi_k(\omega)|\mathcal{F}_t^{(m)}]_{y=X_t} \\
&= E[g(y,\omega)|\mathcal{F}_t^{(m)}]_{y=X_t} = E[g(y,\omega)]_{y=X_t}.
\end{aligned}$$

因为 $\{X_t\}$ 是时齐的, 可得

$$\begin{aligned}
E[f(F(X_t,t,t+h,\omega))|\mathcal{F}_t^{(m)}] &= E[f(F(y,t,t+h,\omega))]_{y=X_t} \\
&= E[f(F(y,0,h,\omega))]_{y=X_t},
\end{aligned}$$

此即 (7.1.10).

附注　定理 7.1.2 说明了 X_t 关于 σ 代数族 $\{\mathcal{F}_t^{(m)}\}_{t\geqslant 0}$ 是 Markov 过程. 因为 $\mathcal{M}_t \subseteq \mathcal{F}_t^{(m)}$, 这隐含着 X_t 关于 σ 代数 $\{\mathcal{M}_t\}_{t\geqslant 0}$ 也是 Markov 过程. 因由定理 B.3 和定理 B.2.c) (附录 B), 及 $E^{X_t}[f(X_h)]$ 是 $\mathcal{M}_t$ 可测的, 得出

$$\begin{aligned}
E^x[f(X_{t+h})|\mathcal{M}_t] &= E^x[E^x[f(X_{t+h})|\mathcal{F}_t^{(m)}]|\mathcal{M}_t] \\
&= E^x[E^{X_t}[f(X_h)]|\mathcal{M}_t] = E^{X_t}[f(X_h)].
\end{aligned}$$

7.2 强 Markov 性

粗略地说, 强 Markov 性表明 (7.1.8) 的形式对 t 用一个更一般的停时或 Markov 时的随机时间 $\tau(\omega)$ 取代时仍然成立.

定义 7.2.1 设 $\{\mathcal{N}_t\}$ 是 (Ω 上的) 一个递增的 σ 代数族, 一个函数 $\tau:\ \Omega \to [0,\infty]$, 如果满足

$$\{\omega;\ \tau(\omega) \leqslant t\} \in \mathcal{N}_t, \quad \forall\, t \geqslant 0,$$

则称它是关于 $\{\mathcal{N}_t\}$ 的一个 (严格) 停时.

换句话说, 通过 $\mathcal{N}_t$ 的信息可以确定 $\tau \leqslant t$ 是否成立.

注意, 如果对所有的 $\omega, \tau(\omega) = t_0$(常数), 那么 τ 是关于任何流的一个平凡的停时. 因为在此情形有

$$\{\omega:\ \tau(\omega) \leqslant t\} = \begin{cases} \Omega, & \text{如果 } t_0 \leqslant t; \\ \varnothing, & \text{如果 } t_0 > t. \end{cases}$$

例 7.2.2 设 $U \subset \mathbf{R}^n$ 是开集, 那么首次逸出时

$$\tau_U := \inf\{t > 0;\ X_t \notin U\}$$

是关于 $\{\mathcal{M}_t\}$ 的一个停时. 因为

$$\{\omega;\ \tau_U \leqslant t\} = \cap_m \cup_{r\in\mathbf{Q},\ r<t} \{\omega; X_r \notin K_m\} \in \mathcal{M}_t,$$

这里 $\{K_m\}$ 是使得 $U = \bigcup\limits_m K_m$ 的一个递增闭集序列.

更一般地, 如果 $H \subset \mathbf{R}^n$ 是任意的集合. 定义首次逸出时 τ_H 如下:

$$\tau_H = \inf\{t > 0;\ X_t \notin H\}.$$

如果把零测度集都包含到 $\mathcal{M}_t$ 中, 那么 $\{\mathcal{M}_t\}$ 是右连续的, 即 $\mathcal{M}_t = \mathcal{M}_{t+}$, 这里 $\mathcal{M}_{t+} = \cap_{s>t}\mathcal{M}_s$ (Chung, 1982, 定理 2.3.4). 因此对任意的 Borel 集 H, τ_H 是一个停时 (Dynkin, 1965II,4.5.C.e).

定义 7.2.3 设 τ 是一个关于 $\{\mathcal{N}_t\}$ 的停时, 设 $\mathcal{N}_\infty$ 是包含所有的 $\mathcal{N}_t$, $t > 0$ 的最小的 σ 代数, 那么 σ 代数 $\mathcal{N}_\tau$ 是由所有的 $N \in \mathcal{N}_\infty$, 且满足

$$N \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{N}_t, \quad \forall\, t \geqslant 0$$

生成的 σ 代数.

当 $\mathcal{N}_t = \mathcal{M}_t$ 时, 一个更直观的描述是 (Rao, 1977; Stroock, Varadhan, 1977, 引理 1.3.3)

$$\mathcal{M}_\tau = \text{由 } \{X_{\min(s,\tau)};\ s \geqslant 0\} \text{ 生成的 } \sigma \text{ 代数}. \tag{7.2.1}$$

类似地, 如果 $\mathcal{N}_t = \mathcal{F}_t^{(m)}$, 得到

$$\mathcal{F}_\tau^{(m)} = \text{由 } \{B_{s\wedge\tau};\ s \geqslant 0\} \text{ 生成的 } \sigma \text{ 代数}.$$

定理 7.2.4(Itô 扩散的强 Markov 性)　设 f 是一个 $\mathbf{R}^n$ 上的有界 Borel 函数, τ 是关于 $\mathcal{F}_t^{(m)}$ 的一个停时, $\tau < \infty$, a.s. 那么

$$E^x[f(X_{\tau+h})|\mathcal{F}_t^{(m)}] = E^{X_\tau}[f(X_h)], \quad \forall\ h \geqslant 0. \tag{7.2.2}$$

证明　模仿 Markov 性 (定理 7.1.2) 的证明, 对几乎所有的 ω, 有 $X_r^{\tau,x}(\omega)$ 满足

$$X_{\tau+h}^{\tau,x} = x + \int_\tau^{\tau+h} b(X_u^{\tau,x})du + \int_\tau^{\tau+h} \sigma(X_\tau^{\tau,x})dB_u.$$

由布朗运动的强 Markov 性 (Gihman, Skorohod, 1972, 第 30 页) 知过程

$$\tilde{B}_v = B_{\tau+v} - B_\tau, \quad v \geqslant 0$$

又是一个布朗运动且与 $\mathcal{F}_\tau^{(m)}$ 独立. 因此

$$X_{\tau+h}^{\tau,x} = x + \int_0^h b(X_{\tau+v}^{\tau,x})dv + \int_0^h \sigma(X_{\tau+v}^{\tau,x})d\tilde{B}_v,$$

故此 $\{X_{\tau+h}^{\tau,x}\}_{h\geqslant 0}$ 一定与方程

$$Y_h = x + \int_0^h b(Y_v)dv + \int_0^h \sigma(Y_v)d\tilde{B}_v$$

的唯一强解 (见 (5.2.8)) 几乎处处一致. 由于 $\{Y_h\}_{h\geqslant 0}$ 与 $\mathcal{F}_\tau^{(m)}$ 是独立的, 故 $\{X_{\tau+h}^{\tau,x}\}$ 也一定与它独立. 更且由弱唯一性 (引理 5.3.1), 得出

$$\{Y_h\}_{h\geqslant 0},\ \{X_{\tau+h}^{\tau,x}\}_{h\geqslant 0} \text{ 与 } \{X_h^{0,x}\}_{h\geqslant 0} \text{ 有相同的律}. \tag{7.2.3}$$

对 $\forall\ r \geqslant t$, 记 $F(x,t,r,\omega) = X_r^{t,x}(\omega)$. 则 (7.2.2) 能写成

$$E[f(F(x,0,\tau+h,\omega))|\mathcal{F}_\tau^{(m)}] = E[f(F(x,0,h,\omega))]_{x=X_\tau^{0,x}}.$$

现在, 由 $X_t = X_t^{0,x}$, 有

$$
\begin{aligned}
F(x,0,\tau+h,\omega) &= X_{\tau+h}(\omega) = x + \int_0^{\tau+h} b(X_s)ds + \int_0^{\tau+h} \sigma(X_s)dB_s \\
&= x + \int_0^{\tau} b(X_s)ds + \int_0^{\tau} \sigma(X_s)dB_s + \int_{\tau}^{\tau+h} b(X_s)ds + \int_{\tau}^{\tau+h} \sigma(X_s)dB_s \\
&= X_\tau + \int_{\tau}^{\tau+h} b(X_s)ds + \int_{\tau}^{\tau+h} \sigma(X_s)dB_s \\
&= F(X_\tau,\tau,\tau+h,\omega),
\end{aligned}
$$

因此 (7.2.2) 可化为

$$
E[f(F(X_\tau,\tau,\tau+h,\omega))|\mathcal{F}_\tau^{(m)}] = E[f(F(x,0,h,\omega))]_{x=X_\tau}.
$$

记 $g(x,t,r,\omega) = f(F(x,t,r,\omega))$, 如定理 7.1.2 的证明, 可以假定 g 有形式

$$
g(x,t,r,\omega) = \sum_k \phi_k(x)\psi_k(t,r,\omega).
$$

那么, 由 $X_{\tau+h}^{\tau,x}$ 与 $\mathcal{F}_\tau^{(m)}$ 的独立性, 利用 (7.2.3) 有

$$
\begin{aligned}
&E[g(X_\tau,\tau,\tau+h,\omega)|\mathcal{F}_\tau^{(m)}] \\
=&\sum_k E[\phi_k(X_\tau)\psi_k(\tau,\tau+h,\omega)|\mathcal{F}_\tau^{(m)}] \\
=&\sum_k \phi_k(X_\tau)E[\psi_k(\tau,\tau+h,\omega)|\mathcal{F}_\tau^{(m)}] \\
=&\sum_k E[\phi_k(x)\psi_k(\tau,\tau+h,\omega)|\mathcal{F}_\tau^{(m)}]_{x=X_\tau} \\
=&E[g(x,\tau,\tau+h,\omega)|\mathcal{F}_\tau^{(m)}]_{x=X_\tau} = E[g(x,\tau,\tau+h,\omega)]_{x=X_\tau} \\
=&E[f(X_{\tau+h}^{\tau,x})]_{x=X_\tau} = E[f(X_h^{0,x})]_{x=X_\tau} = E[f(F(x,0,h,\omega))]_{x=X_\tau}.
\end{aligned}
$$

现在把 (7.2.2) 推广如下:

如果 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的有界 Borel 函数, τ 是 $\mathcal{F}_t^{(m)}$ 停时, $\tau < \infty$ a.s. 那么对 $\forall\, 0 \leqslant h_1 \leqslant h_2 \leqslant \cdots \leqslant h_k$ 有

$$
\begin{aligned}
&E^x[f_1(X_{\tau+h_1})f_2(X_{\tau+h_2})\cdots f_k(X_{\tau+h_k})|\mathcal{F}_\tau^{(m)}] \\
=&E^{X_\tau}[f_1(X_{h_1})f_2(X_{h_2})\cdots f_k(X_{h_k})],
\end{aligned}
\tag{7.2.4}
$$

它可由归纳法得到, 这里只证明 $k=2$ 的情形:

$$
\begin{aligned}
&E^x[f_1(X_{\tau+h_1})f_2(X_{\tau+h_2})|\mathcal{F}_\tau^{(m)}] \\
=&E^x[E^x[f_1(X_{\tau+h_1})f_2(X_{\tau+h_2})|\mathcal{F}_{\tau+h_1}]|\mathcal{F}_\tau^{(m)}]
\end{aligned}
$$

$$= E^x[f_1(X_{\tau+h_1})E^x[f_2(X_{\tau+h_2})|\mathcal{F}_{\tau+h_1}]|\mathcal{F}_\tau^{(m)}]$$
$$= E^x[f_1(X_{\tau+h_1})E^{X_{\tau+h_1}}[f_2(X_{h_2-h_1})]|\mathcal{F}_\tau^{(m)}]$$
$$= E^{X_\tau}[f_1(X_{h_1})E^{X_{h_1}}[f_2(X_{h_2-h_1})]] = E^{X_\tau}[f_1(X_{h_1})E^x[f_2(X_{h_2})|\mathcal{F}_{h_1}^{(m)}]]$$
$$= E^{X_\tau}[f_1(X_{h_1})f_2(X_{h_2})],$$

如所要证.

下面进行更深一步的推广. 设 $\mathcal{H}$ 是由所有实 $\mathcal{M}_\infty$ 可测函数构成的集合. 对 $t \geqslant 0$, 定义移位算子

$$\theta_t : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

如下: 如果 $\eta = g_1(X_{t_1}) \cdots g_k(X_{t_k})$ (g_i 为 Borel 可测函数, $t_i \geqslant 0$). 定义

$$\theta_t \eta = g_1(X_{t_1+t}) \cdots g_k(X_{t_k+t}).$$

通过对这些函数求和取极限, 可把它自然地推广到 $\mathcal{H}$ 中的所有函数. 由 (7.2.4) 可得对任意的停时 τ, 及任意有界的 $\eta \in \mathcal{H}$ 有

$$E^x[\theta_\tau \eta|\mathcal{F}_\tau^{(m)}] = E^{X_\tau}[\eta], \tag{7.2.5}$$

这里, 如果 $\tau(\omega) = t$, 则

$$(\theta_\tau \eta)(\omega) = (\theta_t \eta)(\omega).$$

首中分布, 调和测度及平均值性质

将把它应用到下面的情形. 设 $H \subset \mathbf{R}^n$ 是可测的, 且 τ_H 是 Itô 扩散 X_t 首次逸出 H 的时间. α 是另一个停时, g 是 $\mathbf{R}^n$ 上的有界连续函数, 且设

$$\eta = g(X_{\tau_H})\mathcal{X}_{\{\tau_H<\infty\}}, \quad \tau_H^\alpha = \inf\{t > \alpha; X_t \notin H\},$$

那么有

$$\theta_\alpha \eta \cdot \mathcal{X}_{\alpha<\infty} = g(X_{\tau_H^\alpha})\mathcal{X}_{\{\tau_H^\alpha<\infty\}}. \tag{7.2.6}$$

为了证明 (7.2.6), 用 $\eta^{(k)}$ 逼近 $\eta, k = 1, 2, \cdots$. 其中 $\eta^{(k)}$ 形式如下:

$$\eta^{(k)} = \sum_j g(X_{t_j})\mathcal{X}_{[t_j,t_{j+1})}(\tau_H), \quad t_j = j2^{-k}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots.$$

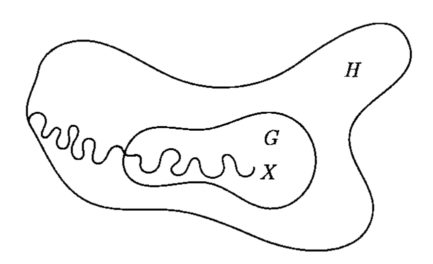
现在

$$\theta_t \mathcal{X}_{[t_j,t_{j+1})}(\tau_H) = \theta_t \mathcal{X}_{\{\forall\ r\in(0,t_j),\ X_r\in H \text{且} \exists\ s\in[t_j,t_{j+1}),\ X_s\notin H\}}$$
$$= \mathcal{X}_{\{\forall\ r\in(0,t_j), X_{r+t}\in H \text{且} \exists\ s\in[t_j,t_{j+1}),\ X_{s+t}\notin H\}}$$
$$= \mathcal{X}_{\{\forall\ u\in(t,t_j+t), X_u\in H \text{且} \exists\ v\in[t_j+t,t_{j+1}+t),\ X_v\notin H\}}$$
$$= \mathcal{X}_{[t_j+t,t_{j+1}+t)}(\tau_H^t),$$

因此有

$$\theta_t\eta=\lim_k\theta_t\eta^{(k)}=\lim_k\sum_j g(X_{t_j+t})\mathcal{X}_{[t_j+t,t_{j+1}+t)}(\tau_H^t)$$
$$=g(X_{\tau_H^t})\mathcal{X}_{\{\tau_H^t<\infty\}},$$

此即 (7.2.6).



特别, 如果 $\alpha=\tau_G$, 这里 $G\subset\subset H$ 为可测集, $\tau_H<\infty$ a.s. Q^x. 那么 $\tau_H^\alpha=\tau_H$, 则可得到

$$\theta_{\tau_G}g(X_{\tau_H})=g(X_{\tau_H}),\tag{7.2.7}$$

故此, 如果 f 为任意有界可测函数, 则从 (7.2.5) 和 (7.2.7) 知, 对 $x\in G$, 有

$$E^x[f(X_{\tau_H})]=E^x[E^{X_{\tau_G}}[f(X_{\tau_H})]]=\int_{\partial G}E^y[f(X_{\tau_H})]\cdot Q^x[X_{\tau_G}\in dy]\tag{7.2.8}$$

(定义 $\mu_H^x(F)=Q^x$, $(X_{\tau_H}\in F)$ 且用满足 (7.2.7) 的连续函数 g 在 $L^1(\mu_H^x)$ 中逼近 f). 换句话说, 初始值 $x\in G$ 时, f 在 X_{τ_H} 处的期望值, 能由初始值 $y\in\partial G$ 时, f 在 X_{τ_H} 处的期望值关于 X 在 ∂G 上的首中分布 (调和测度) 的积分而得到. 这个可重新叙述如下:

定义 X 在 ∂G 上的调和测度 μ_G^x,

$$\mu_G^x(F)=Q^x[X_{\tau_G}\in F],\quad F\subset\partial G,\ x\in G,$$

那么函数

$$\phi(x)=E^x[f(X_{\tau_H})]$$

满足平均值性质: 对任意的 Borel 集 $G\subset\subset H$ 有

$$\phi(x)=\int_{\partial G}\phi(y)d\mu_G^x(y),\quad\forall\ x\in G,\tag{7.2.9}$$

这是第 9 章中广义化 Dirichlet 问题的解的一个重要组成部分.

7.3 Itô 扩散的生成元

在许多应用方面, 把二阶偏微分算子 A 与 Itô 扩散 X_t 结合在一起有十分重

要的意义. A 与 X_t 的本质关系是 A 为过程 X_t 的生成元.

定义 7.3.1 设 $\{X_t\}$ 是一个 $\mathbf{R}^n$ 上的 (时齐的) Itô 扩散, X_t 的 (无穷小) 生成元 A 定义为

$$Af(x)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{E^x[f(X_t)]-f(x)}{t},\quad x\in\mathbf{R}^n.$$

使上式在 x 处的极限存在的函数 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 的全体集合记作 $\mathcal{D}_A(x)$, 而 $\mathcal{D}_A$ 表示对所有的 $x\in\mathbf{R}^n$ 上式极限都存在的函数全体之集合.

为了求得 A 与定义 X_t 的随机微分方程 (7.1.4) 的系数 b, σ 的关系, 必须利用下面的结果. 它在许多方面都很有用.

引理 7.3.2 设 $Y_t=Y_t^x$ 是一个 $\mathbf{R}^n$ 中的 Itô 过程, 形式如下:

$$Y_t^x(\omega)=x+\int_0^t u(s,\omega)ds+\int_0^t v(s,\omega)dB_s(\omega),$$

这里 B 是 m 维布朗运动. 设 $f\in C_0^2(\mathbf{R}^n)$, 即 $f\in C^2(\mathbf{R}^n)$ 且 f 具有紧支集. 记 τ 是关于 $\{\mathcal{F}_t^{(m)}\}$ 的停时, 且假定 $E^x[\tau]<\infty$, 假设 $u(t,\omega)$ 与 $v(t,\omega)$ 在使得 $Y(t,\omega)$ 属于 f 的支集 (关于 (t,ω) 的集合) 上有界, 那么

$$\begin{aligned}E^x[f(Y_\tau)]=f(x)+E^x\Bigg[\int_0^\tau\Bigg(&\sum_i u_i(s,\omega)\frac{\partial f}{\partial x_i}(Y_s)\\&+\frac{1}{2}\sum_{i,j}(vv^T)_{i,j}(s,\omega)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(Y_s)\Bigg)ds\Bigg],\end{aligned}$$

这里 E^x 是关于初始值为 x 的 Y_t 的自然概率律 $\mathbf{R}^x$ 的期望. 其中

$$R^x[Y_{t_1}\in F_1,\cdots,Y_{t_k}\in F_k]=P^0[Y_{t_1}^x\in F_1,\cdots,Y_{t_k}\in F_k],\quad F_i \text{ 为 Borel 集}.$$

证明 设 $Z=f(Y)$, 应用 Itô 公式 (为简便起见, 省略 t, 记 $Y_1,\cdots,Y_n$ 和 $B_1,\cdots,B_m$ 表示 Y 和 B 的坐标)

$$\begin{aligned}dZ&=\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(Y)dY_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial X_i\partial X_j}(Y)dY_idY_j\\&=\sum_i u_i\frac{\partial f}{\partial x_i}dt+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial X_i\partial X_j}(vdB)_i(vdB)_j+\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(vdB)_i.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}(vdB)_i(vdB)_j&=\left(\sum_k v_{ik}dB_k\right)\left(\sum_n v_{jn}dB_n\right)\\&=\left(\sum_k v_{ik}v_{jk}\right)dt=(vv^T)_{ij}dt,\end{aligned}$$

这给出

$$f(Y_t) = f(Y_0) + \int_0^t \left(\sum_i u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (vv^T)_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) ds + \sum_{i,k} \int_0^t v_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i} dB_k, \tag{7.3.1}$$

因此

$$E^x[f(Y_\tau)] = f(x) + E^x\left[\int_0^\tau \left(\sum_i u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(Y) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (vv^T)_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Y) \right) ds \right] + \sum_{i,k} E^x \left[\int_0^\tau v_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i}(Y) dB_k \right].$$

如果 g 是有界的 Borel 可测函数, $|g| \leqslant M$. 那么对任意的整数 k, 有

$$E^x \left[\int_0^{\tau \wedge k} g(Y_s) dB_s \right] = E^x \left[\int_0^k \mathcal{X}_{\{s<\tau\}} g(Y_s) dB_s \right] = 0,$$

因为 $g(Y_s)$ 和 $\mathcal{X}_{\{s<\tau\}}$ 都是 $\mathcal{F}_s^{(m)}$ 可测的, 而且有

$$\begin{aligned} E^x\left[\left(\int_0^\tau g(Y_s) dB_s - \int_0^{\tau\wedge k} g(Y_s) dB_s \right)^2 \right] &= E^x \left[\int_{\tau \wedge k}^\tau g^2(Y_s) ds \right] \\ &\leqslant M^2 E^x[\tau - \tau \wedge k] \to 0, \end{aligned}$$

因此

$$0 = \lim_{k\to\infty} E^x \left[\int_0^{\tau\wedge k} g(Y_s) dB_s \right] = E^x \left[\int_0^\tau g(Y_s) dB_s \right].$$

结合 (7.3.2) 可得到引理 7.3.2.

这立刻给出了 Itô 扩散的生成元 A 的公式.

定理 7.3.3 设 X_t 是 Itô 扩散

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t,$$

如果 $f \in C_0^2(\mathbf{R}^n)$, 那么 $f \in \mathcal{D}_A$, 且

$$Af(x) = \sum_i b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma\sigma^T)_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}. \tag{7.3.2}$$

证明 由引理 7.3.2($\tau = t$) 及 A 的定义可得.

例 7.3.4 n 维布朗运动自然是下面随机微分方程

$$dX_t = dB_t$$

的解, 即有 $b = 0$, $\sigma = I_n$, 为 n 阶单位矩阵. 因此 B_t 的生成元是

$$Af = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, \quad f = f(x_1, \cdots, x_n) \in C_0^2(\mathbf{R}^n),$$

即 $A = \frac{1}{2}\Delta$, 这里 Δ 是 Laplace 算子.

例 7.3.5(布朗运动的图形)　设 B 表示 1 维布朗运动, $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ 是随机微分方程

$$\begin{cases} dX_1 = dt, & X_1(0) = t_0, \\ dX_2 = dB, & X_2(0) = x_0, \end{cases}$$

即

$$dX = bdt + \sigma dB, \quad X(0) = \begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

的解, 其中 $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 换句话说, X 可以认为是布朗运动的图形. X 的生成元 A 由下面的热传导算子给出

$$Af = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f = f(t, x) \in C_0^2(\mathbf{R}^n).$$

从现在起, 除非有特别说明, 将用 $A = A_X$ 表示 Itô 扩散 X_t 的生成元, $L = L_X$ 表示由 (7.3.3) 式右边给出的微分算子. 从定理 7.3.3 可知, A_X 与 L_X 在 $C_0^2(\mathbf{R}^n)$ 上是一致的.

7.4　Dynkin 公式

结合 (7.3.2) 和 (7.3.3) 得到

定理 7.4.1(Dynkin 公式)　设 $f \in C_0^2(\mathbf{R}^n)$. 假定 τ 是一个停时, $E^x[\tau] < \infty$. 那么

$$E^x[f(X_\tau)] = f(x) + E^x\left[\int_0^\tau Af(X_s)ds\right]. \tag{7.4.1}$$

附注　(i) 如果 τ 是一个有界集的首次逸出时, $E^x[\tau < \infty]$. 那么 (7.4.1) 对任意的 $f \in C^2$ 都成立.

(ii) 更一般的见文献 (Dynkin, 1965,I, 第 133 页).

例 7.4.2　考虑 n 维布朗运动 $B = (B_1, \cdots, B_n)$, 初始值为 $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbf{R}^n, n \geqslant 1$, 且假定 $|a| < R$. 设

$$K = K_R = \{x \in \mathbf{R}^n;\ |x| < R\},$$

那么 B 从球 K 的首次逸出时 τ_K 的期望值是多少呢？选择整数 k, 应用 Dynkin 公式, 其中用 B 代替 X, $\tau = \sigma_k = \min(k, \tau_K)$. 设 $f \in C_0^2$ 使得对任意的 $|x| \leqslant R$, $f(x) = |x|^2$,

$$E^a[f(B_{\sigma_k})] = f(a) + E^a\left[\int_0^{\sigma_k} \frac{1}{2}\Delta f(B_s)ds\right]$$
$$= |a|^2 + E^a\left[\int_0^{\sigma_k} n \cdot ds\right] = |a|^2 + n \cdot E^a[\sigma_k],$$

因此, 对任意的 k, $E^a[\sigma_k] \leqslant \frac{1}{n}(R^2 - |a|^2)$. 令 $k \to \infty$, 得到 $\tau_K = \lim \sigma_k < \infty$, a.s. 且

$$E^a[\tau_K] = \frac{1}{n}(R^2 - |a|^2). \tag{7.4.2}$$

下面假定 $n \geqslant 2$, 且 $|b| > R$, B 的初始值为 b. 那么 B 碰到 K 的概率是多少?

设 α_k 是从圆环

$$A_k = \{x;\ R < |x| < 2^k R\}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

的首次逸出时. 记

$$T_K = \inf\{t > 0;\ X_t \in K\},$$

$f = f_{n,k}$ 是具有紧支集的 C^2 函数且满足: 如果 $R \leqslant |x| \leqslant 2^k R$,

$$f(x) = \begin{cases} -\log|x|, & n = 2, \\ |x|^{2-n}, & n > 2. \end{cases}$$

那么由于在 A_k 中 $\Delta f = 0$, 由 Dynkin 公式有

$$E^b[f(B_{\alpha_k})] = f(b), \quad \forall\ k. \tag{7.4.3}$$

记

$$p_k = P^b[|B_{\alpha_k}| = R], \quad q_k = P^b[|B_{\alpha_k}| = 2^k R].$$

下面分 $n = 2$ 与 $n > 2$ 两种情形进行考虑.

$n = 2$. 由 (7.4.3) 得到

$$-\log R \cdot p_k - (\log R + k \cdot \log 2)q_k = -\log|b|, \quad \forall k. \tag{7.4.4}$$

这隐含了当 $k \to \infty$ 时, 有 $q_k \to 0$. 因此

$$P^b[T_K < \infty] = 1, \tag{7.4.5}$$

即在 $\mathbf{R}^2$ 中布朗运动是常返的 (Port, Stone, 1979).

$n > 2$. 此时 (7.4.3) 给出

$$p_k \cdot R^{2-n} + q_k \cdot (2^k R)^{2-n} = |b|^{2-n},$$

由于 $0 \leqslant q_k \leqslant 1$. 令 $k \to \infty$ 可得到

$$\lim_{k\to\infty} p_k = P^b[T_K < \infty] = \left(\frac{|b|}{R}\right)^{2-n},$$

即对 $n > 2$, 布朗运动在 $\mathbf{R}^n$ 中是瞬态的.

7.5 特征算子

现在介绍一个与生成元 A 紧密相关的一个算子, 它在很多情形比 A 更合适, 如在求 Dirichlet 问题的解时.

定义 7.5.1 设 $\{X_t\}$ 是一个 Itô 扩散. $\{X_t\}$ 的特征算子 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_X$ 定义为

$$\mathcal{A}f(x) = \lim_{U\downarrow x} \frac{E^x[f(X_{\tau_U})] - f(x)}{E^x[\tau_U]}, \tag{7.5.1}$$

这里 U 表示递缩到点 x 的开集序列 U_k, 即 $U_{k+1} \subset U_k$, 且 $\cap_k U_k = \{x\}$, $\tau_U = \inf\{t > 0;\ X_t \notin U\}$ 是 X_t 离开 U 的首次逸出时. 使 (7.5.1) 式的极限对任意的 $x \in \mathbf{R}^n$(及任意的 U_k) 都存在的函数 f 之全体记为 $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$. 如果对任意的开集 $U \ni x$, $E^x[\tau_U] = \infty$, 规定 $\mathcal{A}f(x) = 0$.

易知恒有 $\mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{A}}$, 且 (Dynkin, 1965, Ⅰ, 第 143 页)

$$Af = \mathcal{A}f, \quad \forall f \in \mathcal{D}_A,$$

这里仅需 $\mathcal{A}_X$ 和 L_X 在 C^2 上是一致的. 为了得到这个结论, 首先阐明逸出时的一个性质.

定义 7.5.2 点 $x \in \mathbf{R}^n$ 称为 $\{X_t\}$ 的一个陷阱 (套点). 如果

$$Q^x(\{X_t = x, \forall\ t\}) = 1,$$

换句话说, x 是陷阱当且仅当 $\tau_x = \infty$ a.s. Q^x. 例如, 若 $b(x_0) = \sigma(x_0) = 0$, 则 x_0 是 X_t 的一个陷阱 (套点)(由 X_t 的强唯一性).

引理 7.5.3 如果 x 不是 X_t 的一个陷阱, 那么存在一个开集 $U \ni x$ 使得

$$E^x[\tau_U] < \infty.$$

证明 见文献 (Dynkin, 1965, I) 中的第 139 页引理 5.5.

定理 7.5.4 设 $f\in C^2$. 那么 $f\in\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ 且有

$$\mathcal{A}f=\sum_i b_i\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\sigma^T)_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}. \tag{7.5.2}$$

证明 如前, L 表示 (7.5.2) 右边的算子, 如果 x 是 X_t 的一个陷阱, 那么 $\mathcal{A}f(x)=0$. 选择一个有界开集 V, 使得 $x\in V$, 修正 f 为 f_0, 使 $f_0\in C_0^2(\mathbf{R}^n)$ 且在 V 上 f_0 与 f 相等. 则 $f_0\in\mathcal{D}_{\mathcal{A}}(x)$ 且 $0=\mathcal{A}f_0(x)=Lf_0(x)=Lf(x)$, 此时有 $\mathcal{A}f(x)=Lf(x)=0$. 如果 x 不是陷阱, 选择一个有界开集 $U\ni x$, 使得 $E^x[\tau_U]<\infty$. 那么由 Dynkin 公式 (定理 7.4.1) (及它下面的附注 (i)). 简记 $\tau_U=\tau$, 得

$$\begin{aligned}\left|\frac{E^x[f(X_\tau)]-f(x)}{E^x[\tau]}-Lf(x)\right|&=\frac{|E^x[\int_0^\tau\{(Lf)(X_s)-Lf(x)\}ds]|}{E^x[\tau]}\\&\leqslant\sup_{y\in U}|Lf(x)-Lf(y)|\to 0,\quad \text{当 } U\downarrow x \text{ 时},\end{aligned}$$

因为 Lf 是连续函数.

附注 现在已经得到了 Itô 扩散是一个连续的强 Markov 过程, 且它的特征算子的定义域包含了 C^2. 因此 Itô 扩散也是 Dynkin(1965, I) 意义下的扩散.

例 7.5.5(单位圆上的布朗运动) 设过程 $Y=\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix}$ 为例 5.1.4 中满足随机微分方程 (5.1.3) 的过程, 即

$$\begin{cases}dY_1=-\dfrac{1}{2}Y_1dt-Y_2dB,\\ dY_2=-\dfrac{1}{2}Y_2dt+Y_1dB,\end{cases}$$

它的特征算子为

$$\mathcal{A}f(y_1,y_2)=\frac{1}{2}\left[y_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2}-2y_1y_2\frac{\partial^2 f}{\partial y_1\partial y_2}+y_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2}-y_1\frac{\partial f}{\partial y_1}-y_2\frac{\partial f}{\partial y_2}\right],$$

这是因为 $dY=-\frac{1}{2}Ydt+KYdB$, 这里

$$K=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}.$$

因此 $dY=b(Y)dt+\sigma(Y)dB$, 其中

$$b(y_1,y_2)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}y_1\\-\frac{1}{2}y_2\end{pmatrix},\quad \sigma(y_1,y_2)=\begin{pmatrix}-y_2\\y_1\end{pmatrix},$$

$$a = \frac{1}{2}\sigma\sigma^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} y_2^2 & -y_1y_2 \\ -y_1y_2 & y_1^2 \end{pmatrix}.$$

例 7.5.6　设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中的开集, 使得对任意的 x, $\tau_D < \infty$ a.s. Q^x. 设 ϕ 是 ∂D 上的一个有界可测函数. 定义

$$\tilde{\phi}(x) = E^x[\phi(X_{\tau_D})]$$

($\tilde{\phi}$ 称为 ϕ 的 X 调和延拓). 如果 U 是一个开集, $x \in U \subset\subset D$, 由 (7.2.8) 可得

$$E^x[\tilde{\phi}(X_{\tau_U})] = E^x[E^{X_{\tau_U}}[\phi(X_{\tau_D})]] = E^x[\phi(X_{\tau_D})] = \tilde{\phi}(x),$$

因此, $\tilde{\phi} \in \mathcal{D}_\mathcal{A}$, 且在 D 中 $\mathcal{A}\tilde{\phi} = 0$. 而 $\tilde{\phi}$ 在 D 上甚至有可能不连续 (见例 9.2.1).

练　　习

7.1.* 求下面 Itô 扩散的生成元:

a) $dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t$ (Ornstein-Uhlenbeck 过程) ($B_t \in \mathbf{R}$, μ, σ 为常数).

b) $dX_t = rX_t dt + \alpha X_t dB_t$ (几何布朗运动) ($B_t \in \mathbf{R}$, r, α 为常数).

c) $dY_t = rdt + \alpha Y_t dB_t$ ($B_t \in \mathbf{R}$, r, α 为常数).

d) $dY_t = \begin{pmatrix} dt \\ dX_t \end{pmatrix}$ 这里 X_t 如 a).

e) $\begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ X_2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{X_1} \end{pmatrix} dB_t$ ($B_t \in \mathbf{R}$).

f) $\begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dB_1 \\ dB_2 \end{pmatrix}$.

g) $X(t) = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$, 这里

$$dX_k = r_k X_k dt + X_k \cdot \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} dB_j, \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

($(B_1, \cdots, B_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的布朗运动, r_k, α_{kj} 都为常数).

7.2.* 求 Itô 扩散 (即写出它的随机微分方程), 使它的生成元如下:

a) $Af(x) = f'(x) + f''(x), f \in C_0^2(\mathbf{R})$.

b) $Af(t,x) = \frac{\partial f}{\partial t} + cx\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f \in C_0^2(\mathbf{R}^2)$, 这里 c, α 为常数.

c)

$$\begin{aligned} Af(x_1,x_2) = {}& 2x_2\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ln(1 + x_1^2 + x_2^2)\frac{\partial f}{\partial x_2} \\ & + \frac{1}{2}(1 + x_1^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + x_1\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \quad f \in C_0^2(\mathbf{R}^2). \end{aligned}$$

7.3. 设 B_t 是 $\mathbf{R}$ 中的布朗运动, $B_0 = 0$. 定义

$$X_t = X_t^x = x \cdot e^{ct+\alpha B_t},$$

这里 c, α 为常数. 从定义直接证明 X_t 是一个 Markov 过程.

7.4.* 设 B_t^x 是 1 维布朗运动, 初始值为 $x \in \mathbf{R}^+$. 记

$$\tau = \inf\{t > 0;\ B_t^x = 0\}.$$

a) 证明对任意的 $x > 0$, $\tau < \infty$ a.s. P^x. 提示: 见例 7.4.2 第二部分.

b) 证明对任意的 $x > 0$, $E^x[\tau] = \infty$. 提示: 见例 7.4.2 第一部分.

7.5. 设函数 b, σ 满足定理 5.2.1 的条件, 且常数 C 与 t 无关, 即对任意的 $x \in \mathbf{R}^n$, $t \geqslant 0$ 有

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leqslant C(1+|x|).$$

设 X_t 是

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

的解. 证明存在与 t 无关的常数 K 使得

$$E[|X_t|^2] \leqslant (1 + E[|X_0|^2])e^{Kt} - 1.$$

提示: 利用 Dynkin 公式; $f(x) = |x|^2$, 及 $\tau = t \wedge \tau_R$. 这里 $\tau_R = \inf\{t > 0; |x_t| \geqslant R\}$, 令 $R \to \infty$, 可获得不等式:

$$E[|X_t|^2] \leqslant E[|X_0|^2] + K \cdot \int_0^t (1 + E[|X_s|^2])ds,$$

它具有 (5.2.9) 的形式.

7.6. 设 $g(x,\omega) = f \circ F(x,t,t+h,\omega)$ 如定理 7.1.2 的证明中一样, 假定 f 是连续的.

a) 利用 (5.2.9) 证明映射: $x \to g(x,\cdot)$ 是从 $\mathbf{R}^n$ 到 $L^2(P)$ 的连续映射.

为简单起见, 在下面的情形假定 $n = 1$.

b) 利用 a) 证明 $(x,\omega) \to g(x,\omega)$ 是可测的. 提示: 对每个 $m = 1, 2, \cdots$, 设 $\xi_k = \xi_k^{(m)} = k \cdot 2^{-m}$, $k = 1, 2, \cdots$, 那么对每个 x,

$$g^{(m)}(x,\cdot) := \sum_k g(\xi,\cdot)\mathcal{X}_{\{\xi_k \leqslant x < \xi_{k+1}\}}$$

在 $L^2(P)$ 中都收敛于 $g(x,\cdot)$. 对每个 R, 在 $L^2(dm_R \times dP)$ 中可推出 $g^{(m)} \to g$. 这里 dm_R 是 $\{|x| \leqslant R\}$ 上的 Lebesgue 测度. 因此存在 $g^{(m)}(x,\omega)$ 的一个子序列对几乎所有的 (x,ω) 收敛于 $g(x,\omega)$.

7.7. 设 B_t 是 $\mathbf{R}^n$ 中的布朗运动, 初始值为 $x \in \mathbf{R}^n$. $D \subset \mathbf{R}^n$ 是以 x 为中心的开球.

a) 利用练习 2.15 证明 B_t 的调和测度 μ_D^x 在球面 ∂D 上是旋转不变的 (关于 x). 得出 μ_D^x 与 ∂D 上的正规化面测度 σ 一致.

b) 设 ϕ 是有界开集 $W \subset \mathbf{R}^n$ 上的一个有界可测函数. 定义

$$u(x) = E^x[\phi(B_{\tau_W})], \quad x \in W.$$

证明对任意以 x 为中心的球 D, 且 $\bar{D} \subset W$, u 满足经典的平均值性质

$$u(x) = \int_{\partial D} u(y) d\sigma(y). \tag{7.5.3}$$

c) 设 W 如 b), 且设 $w: W \to \mathbf{R}$ 是在 W 中调和的, 即在 W 中有

$$\Delta w := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} = 0. \tag{7.5.4}$$

证明 w 满足经典的平均值性质 (7.5.3).

附注　它的逆命题见文献 (Øksendal, Stroock, 1982) 及其参考书.

7.8. 设 $\{\mathcal{N}_t\}$ 是 Ω 上的一个右连续的 σ 代数族, 且包含了所有的零测度集.

a) 设 τ_1, τ_2 是 (关于 $\mathcal{N}_t$ 的) 停时, 证明 $\tau_1 \wedge \tau_2$ 和 $\tau_1 \vee \tau_2$ 也是停时.

b) 如果 $\{\tau_n\}$ 是一个递减的停时序列, 证明 $\tau := \lim_n \tau_n$ 也是一个停时.

c) 如果 X_t 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 Itô 扩散, $F \in \mathbf{R}^n$ 是闭集. 证明 τ_F 是关于 $\mathcal{M}_t$ 的一个停时. 提示: 考虑开集列递减至 F.

7.9. 设 X_t 是一个几何布朗运动, 即

$$dX_t = rX_t dt + \alpha X_t dB_t, \quad X_0 = x > 0,$$

这里 $B_t \in \mathbf{R}$, r, α 都为常数.

a) 求 X_t 的生成元. 当 $f(x) = x^\gamma$, $x > 0$, γ 为常数, 计算 $Af(x)$.

b) 如果 $r < \frac{1}{2}\alpha^2$, 那么当 $t \to \infty$ 时, $x_t \to 0$ a.s. Q^x (例 5.1.1). 当初始值 $x < R$ 时, X_t 到达值 R 的概率 p 是多少? 当 $f(x) = x^{\gamma_1}, \gamma_1 = 1 - \frac{2r}{\alpha^2}$ 时, 利用 Dynkin 公式证明

$$p = \left(\frac{x}{R}\right)^{\gamma_1}.$$

c) 如果 $r > \frac{1}{2}\alpha^2$, 当 $t \to \infty$ 时, $X_t \to \infty$ a.s. Q^x. 记

$$\tau = \inf\{t > 0;\ X_t \geqslant R\},$$

当 $f(x) = \ln x$, $x > 0$, 利用 Dynkin 公式证明

$$E^x[\tau] = \frac{\ln \frac{R}{x}}{r - \frac{1}{2}\alpha^2}.$$

提示: 首先考虑从 (ρ, R) 的逸出时. 这里 $\rho > 0$, 然后令 $\rho \to 0$. 必须估计

$$(1 - p(\rho)) \ln \rho,$$

这里

$$p(\rho) = Q^x[X_t \text{ 在到达 } \rho \text{ 之前先到达 } R],$$

它可通过 a), b) 中的计算得到.

7.10. 设 X_t 是几何布朗运动,

$$dX_t = rX_t dt + \alpha X_t dB_t.$$

a) 利用 Markov 性及

b) 写出 $X_t = xe^{rt}M_t$. 这里 $M_t = \exp\left(\alpha B_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t\right)$ 是一个鞅. 对 $t \leqslant T$, 求 $E^x[X_T|\mathcal{F}_t]$.

7.11. 设 X_t 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 Itô 扩散. $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 是满足下式的函数:

$$E^x\left[\int_0^\infty |f(X_t)|dt\right] < \infty, \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^n.$$

设 τ 是一个停时, 利用强 Markov 性证明

$$E^x\left[\int_\tau^\infty f(X_t)dt\right] = E^x[g(X_\tau)],$$

这里 $g(y) = E^y\left[\int_0^\infty f(X_t)dt\right]$.

7.12. (局部鞅) 对一个 $\mathcal{N}_t$ 适应的随机过程 $Z(t) \in \mathbf{R}^n$, 如果存在一个单调递增的 $\mathcal{N}_t$ 停时序列 τ_k, 使得当 $k \to \infty$ 时, $\tau_k \to \infty$ a.s. 且对任意的 k, $Z(t \wedge \tau_k)$ 是一个 $\mathcal{N}_t$ 鞅. 则称 $Z(t)$ 是关于流 $\{\mathcal{N}_t\}$ 的局部鞅.

a) 证明如果 $Z(t)$ 是一个局部鞅且存在一个常数 $T \leqslant \infty$, 使得族 $\{Z(\tau)\}_{\tau \leqslant T}$ 是一致可积的 (附录 C), 那么 $\{Z(t)\}_{t \leqslant T}$ 是一个鞅.

b) 特别, 如果 $Z(t)$ 是一个局部鞅且存在常数 $K < \infty$ 使得对任意的停时 $\tau \leqslant T$ 有

$$E[Z^2(\tau)] \leqslant K,$$

那么 $\{Z(t)\}_{t \leqslant T}$ 是一个鞅.

c) 证明: 如果 $Z(t)$ 是一个下有界的局部鞅, 那么 $Z(t)$ 是一个上鞅 (附录 C).

d) 设 $\phi \in \mathcal{W}(0, T)$, 证明

$$Z(t) := \int_0^t \phi(s, \omega)dB(s), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

是一个局部鞅.

7.13. a) 设 $B_t \in \mathbf{R}^2$, $B_0 = x \neq 0$, 固定 $0 < \varepsilon < R < \infty$ 且定义

$$X_t = \ln|B_{t\wedge\tau}|, \quad t \geqslant 0,$$

这里

$$\tau = \inf\{t > 0;\ |B_t| \leqslant \varepsilon \text{ 或 } |B_t| \geqslant R\}.$$

证明 X_t 是一个 $\mathcal{F}_{t\wedge\tau}$ 鞅. 提示: 利用练习 4.8. 推导 $\ln|B_t|$ 是一个局部鞅 (练习 7.12).

b) 设 $B_t \in \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 3$, $B_0 = x \neq 0$. 固定 $\varepsilon > 0$, $R < \infty$. 定义

$$Y_t = |B_{t\wedge\tau}|^{2-n}, \quad t \geqslant 0,$$

这里

$$\tau = \inf\{t > 0;\ |B_t| \leqslant \varepsilon \text{ 或 } |B_t| \geqslant R\}.$$

证明 Y_t 是一个 $\mathcal{F}_{t\wedge\tau}$ 鞅. 推导 $|B_t|^{2-n}$ 是一个局部鞅.

7.14. (Doob 的 h 变换) 设 B_t 是 n 维布朗运动, $D \subset \mathbf{R}^n$ 是一个有界开集, $h > 0$ 是 D 上的调和函数 (即 $\Delta h = 0$ 在 D 中成立). 设 X_t 是下面随机微分方程

$$dX_t = \nabla(\ln h)(X_t)dt + dB_t$$

的解. 更准确地说, 选择一个单调递增开集序列 $\{D_k\}$, 使 $\bar{D}_k \subset D$ 且 $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = D$. 那么对每个 $k, t < \tau_{D_k}$, 上面的方程能得到 (强) 解. 这样对 $t < \tau := \lim_{k\to\infty} \tau_{D_k}$, 很自然地可得到它的解.

a) 证明 X_t 的生成元满足

$$Af = \frac{\Delta(hf)}{2h}, \quad \forall f \in C_0^2(D),$$

特别, 如果 $f = \dfrac{1}{h}$, 那么 $Af = 0$.

b) 利用 a) 证明: 如果存在 $x_0 \in \partial D$, 使得

$$\lim_{x\to y\in\partial D} h(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } y \neq x_0; \\ \infty, & \text{如果 } y = x_0 \end{cases}$$

(即 h 是一个核函数). 那么

$$\lim_{t\to\tau} X_t = x_0 \text{ a.s.}$$

提示: 考虑 $E^x[f(X_T)]$, 其中 T 为适当的停时. $f = \dfrac{1}{h}$. 换句话说, 在 B_t 上施加一个漂移, 使得过程只在 x_0 处逸出 D. 这个也可理解如下: 可通过对 B_t 施加一个只从 x_0 处逸出 D 的条件即可得到 X_t(Doob, 1984).

7.15.* 设 B_t 是 1 维布朗运动, 定义

$$F(\omega) = (B_T(\omega) - K)^+,$$

这里 $K > 0$, $T > 0$ 都是常数. 由 Itô 表示定理 (定理 4.3.3) 知, 存在 $\phi \in \mathcal{V}(0,T)$ 使得

$$F(\omega) = E[F] + \int_0^T \phi(t,\omega)dB_t,$$

如何求 ϕ? 这个问题在数理金融学里是很感兴趣的. 在那里 ϕ 可以被看作是未定权益 (或有权益) F 的复制证券组合 (见第 12 章). 利用 Clark-Ocone 公式 (Karatzas, Ocone, 1991; Øksendal, 1996; Aase et al., 2000) 可推出

$$\phi(t,\omega) = E[x_{[K,\infty)}(B_t)|\mathcal{F}_t], \quad t < T, \tag{7.5.5}$$

利用 (7.5.5) 和布朗运动的 Markov 性证明对 $t<T$, 有

$$\phi(t,\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_K^\infty \exp\left(-\frac{(x-B_t(\omega))^2}{2(T-t)}\right)dx. \tag{7.5.6}$$

7.16. 设 B_t 是 1 维布朗运动, $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是一个有界函数. 证明: 对 $t<T$, 有

$$E^x[f(B_T)|\mathcal{F}_t]=\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{\mathbf{R}} f(x)\exp(-\frac{(x-B_t(\omega))^2}{2(T-t)})dx. \tag{7.5.7}$$

与 (7.5.6) 进行比较.

7.17. 设 B_t 是 1 维布朗运动

$$X_t=\left(x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}B_t\right)^3,\quad t\geqslant 0.$$

然而在练习 4.15 中已知 X_t 是随机微分方程

$$dX_t=\frac{1}{3}X_t^{\frac{1}{3}}dt+X_t^{\frac{2}{3}}dB_t,\quad X_0=x \tag{7.5.8}$$

的解. 定义 $\tau=\inf\{t>0;\ X_t=0\}$. 记

$$Y_t=\begin{cases}X_t, & t\leqslant\tau;\\ 0, & t>\tau.\end{cases}$$

证明 Y_t 也是 (7.5.8) 的一个 (强) 解. 为什么它与定理 5.2.1 的唯一性论断并不矛盾呢? 提示: 对任意的 t, 通过分解积分如下:

$$\int_0^t=\int_0^{t\wedge\tau}+\int_{t\wedge\tau}^t,$$

证明

$$Y_t=x+\int_0^t\frac{1}{3}Y_s^{\frac{1}{3}}ds+\int_0^t Y_s^{\frac{2}{3}}dB_s.$$

7.18.* a) 设

$$dX_t=b(X_t)dt+\sigma(X_t)dB_t,\quad X_0=x$$

是 1 维 Itô 扩散, 特征算子为 $\mathcal{A}$. 设 $f\in C^2(\mathbf{R})$ 是下面微分方程

$$\mathcal{A}f(x)=b(x)f'(x)+\frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x)=0,\quad x\in\mathbf{R} \tag{7.5.9}$$

的解. 设 $(a,b)\subset\mathbf{R}$ 是一个开区间, 使得 $x\in(a,b)$, 且记

$$\tau=\inf\{t>0;\ X_t\notin(a,b)\}.$$

假定 $\tau<\infty$ a.s. Q^x. 定义 $p=P^x[X_\tau=b]$, 利用 Dynkin 公式证明

$$p=\frac{f(x)-f(a)}{f(b)-f(a)}, \tag{7.5.10}$$

换句话说, X 在 $\partial(a,b)=\{a,b\}$ 上的调和测度是

$$\mu^x_{(a,b)}(b)=\frac{f(x)-f(a)}{f(b)-f(a)},\quad \mu^x_{(a,b)}(a)=\frac{f(b)-f(x)}{f(b)-f(a)}. \tag{7.5.11}$$

b) 特殊情形, 过程

$$X_t=x+B_t,\quad t\geqslant 0.$$

证明:

$$p=\frac{x-a}{b-a}. \tag{7.5.12}$$

c) 如果

$$X_t=x+\mu t+\sigma B_t,\quad t\geqslant 0,$$

这里 $\mu,\sigma\in\mathbf{R}$ 都为非零常数. 求 p.

7.19. 设 B_t^x 为 1 维布朗运动, 初始值为 $x>0$. 定义

$$\tau=\tau(x,\omega)=\inf\{t>0;\ B_t^x(\omega)=0\}.$$

从练习 7.4 知有

$$\tau<\infty \text{ a.s. } P^x,\quad \text{且 } E^x[\tau]=\infty,$$

那么随机变量 $\tau(\omega)$ 的分布是什么?

a) 为了回答上述问题, 首先求 Laplace 变换

$$g(\lambda):=E^x[e^{-\lambda\tau}],\quad \lambda>0.$$

提示: 设 $M_t=\exp(-\sqrt{2\lambda}B_t-\lambda t)$, 那么 $\{M_{t\wedge\tau}\}_{t\geqslant 0}$ 是一个有界鞅 (解: $g(\lambda)=\exp(-\sqrt{2\lambda}x)$).

b) 为了求 τ 的密度函数 $f(t)$, 只需求 $f(t)=f(t,x)$ 使得

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}f(t)dt=\exp(-\sqrt{2\lambda}x),\quad \forall\ \lambda>0,$$

即求 $g(\lambda)$ 的 Laplace 逆变换. 证明

$$f(t,x)=\frac{x}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right);\quad t>0.$$

7.20. (在随机拥挤环境下的人口增长 (II)) 与练习 5.15 的模型不同的另一个模型是考虑如下的方程:

$$dX_t=rX_t(K-X_t)dt+\alpha X_t(K-X_t)dB_t,\quad X_0=x\geqslant 0.$$

此方程并不满足定理 5.2.1 中的存在唯一性条件, 然而仍可证明存在唯一的强解. 其步骤如下:

a) 对 $n=1,2,\cdots$, 定义

$$b_n(y)=\begin{cases} y(K-y), & \text{如果 } 0\leqslant y\leqslant n,\\ n(K-n), & \text{如果 } y>n,\end{cases}$$

$$\sigma_n(y) = \begin{cases} \alpha y(K-y), & \text{如果 } 0 \leqslant y \leqslant n, \\ \alpha n(K-n), & \text{如果 } y > n, \end{cases}$$

且设 $X_t = X_t^{(n)}$ 为方程

$$dX_t = b_n(X_t)dt + \sigma_n(X_t)dB_t, \quad X_0 = x$$

的唯一解. 定义

$$\tau_n = \inf\{t > 0;\ X_t^{(n)} = n\}.$$

证明:

$$X_t^{(n)} = X_t^{(n+1)}, \quad \forall\, t < \tau_n,$$

利用它求唯一的强解 X_t, $t < \tau_\infty : \lim_{n\to\infty} \tau_n$.

b) 证明 $\tau_\infty = \infty$ a.s.

c) 证明:

(i) $X_0 = 0 \Rightarrow X_t = 0,\ \forall\, t.$

(ii) $X_0 = K \Rightarrow X_t = K,\ \forall\, t.$

(iii) $0 < X_0 < K \Rightarrow 0 < X_t < K,\ \forall\, t.$

(iv) $X_0 > K \Rightarrow X_t > K,\ \forall\, t.$

对这个人口模型的最优增长的讨论见文献 (Lungu, Øksendal, 1997).

第 8 章　扩散理论的其他论题

在这一章研究扩散理论的其他重要的论题及相关的领域. 其中有些论题在以后的章节中并非必要的, 但在随机分析理论中却都是中心的论题, 在更进一步的应用中是必不可少的.

8.1　Kolmogorov 后向方程, 预解式

设 X_t 为 $\mathbf{R}^n$ 中的 Itô 扩散, 其生成元为 A. 如果选择 $f \in C_0^2(\mathbf{R}^n)$ 及 $\tau = t$. 从 Dynkin 公式 (7.4.1) 看到

$$u(t,x) = E^x[f(X_t)]$$

关于 t 是可微的, 且有

$$\frac{\partial u}{\partial t} = E^x[Af(X_t)], \tag{8.1.1}$$

它表明式 (8.1.1) 的右边也能用 u 表示出来.

定理 8.1.1(Kolmogorov 后向方程)　设 $f \in C_0^2(\mathbf{R}^n)$.

a) 定义

$$u(t,x) = E^x[f(X_t)], \tag{8.1.2}$$

那么对每个 t, $u(t,\cdot) \in \mathcal{D}_A$, 且

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au, \quad t > 0,\ x \in \mathbf{R}^n, \tag{8.1.3}$$

$$u(0,x) = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{8.1.4}$$

这里 (8.1.3) 的右边可看作把 A 应用到函数 $x \to u(t,x)$.

b) 而且, 如果 $w(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n)$ 是一个满足 (8.1.3) 与 (8.1.4) 的有界函数, 那么 $w(t,x) = u(t,x) = E^x[f(X_t)]$.

证明　a) 设 $g(x) = u(t,x)$, 则由 $t \to u(t,x)$ 是可微的, 有

$$\begin{aligned}
\frac{E^x[g(X_r)] - g(x)}{r} &= \frac{1}{r} \cdot E^x[E^{X_r}[f(X_t)] - E^x[f(X_t)]] \\
&= \frac{1}{r} \cdot E^x[E^x[f(X_{t+r})|\mathcal{F}_r] - E^x[f(X_t)|\mathcal{F}_r]] \\
&= \frac{1}{r} \cdot E^x[f(X_{t+r}) - f(X_t)] \\
&= \frac{u(t+r,x) - u(t,x)}{r} \to \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \text{当 } r \downarrow 0 \text{ 时},
\end{aligned}$$

因此

$$Au = \lim_{r \downarrow 0} \frac{E^x[g(X_r)] - g(x)}{r}$$

存在且 $\frac{\partial u}{\partial t} = Au$, 如所要证.

相反, 为证明 b) 中叙述的唯一性, 假定函数 $w(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n)$ 满足 (8.1.3) 和 (8.1.4), 那么

$$\tilde{A}w := -\frac{\partial w}{\partial t} + Aw = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbf{R}^n \tag{8.1.5}$$

且

$$w(0,x) = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{8.1.6}$$

固定 $(s,x) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$. 定义 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的过程 Y_t, $Y_t = (s-t, X_t^{0,x})$, $t \geqslant 0$. 则 Y_t 有生成元 $\tilde{A}$ 且由 (8.1.5) 和 Dynkin 公式知, 对任意的 $t \geqslant 0$,

$$E^{s,x}[w(Y_{t\wedge\tau_R})] = w(s,x) + E^{s,x}\left[\int_0^{t\wedge\tau_R} \tilde{A}w(Y_r)dr\right] = w(s,x),$$

这里 $\tau_R = \inf\{t > 0;\ |X_t| \geqslant R\}$.

令 $R \to \infty$, 得到

$$w(s,x) = E^{s,x}[w(Y_t)], \quad \forall\, t \geqslant 0,$$

特别, 选择 $t = s$, 有

$$w(s,x) = E^{s,x}[w(Y_s)] = E[w(0, X_s^{0,x})] = E[f(X_s^{0,x})] = E^x[f(X_s)].$$

附注 如果引进算子 $Q_t: f \to E^{\cdot}[f(X_t)]$, 那么有 $u(t,x) = (Q_t f)(x)$, 且重写 (8.1.1) 和 (8.1.3) 如下:

$$\frac{d}{dt}(Q_t f) = Q_t(Af); \quad f \in C_0^2(\mathbf{R}^n), \tag{8.1.1$'$}$$

$$\frac{d}{dt}(Q_t f) = A(Q_t f); \quad f \in C_0^2(\mathbf{R}^n), \tag{8.1.3$'$}$$

因此, (8.1.1) 和 (8.1.3) 的等价性总体来说即是 Q_t 和 A 在某种意义下可交换, 形式地说, 它企图说明 (8.1.1)′ 和 (8.1.3)′ 的解是

$$Q_t = e^{tA},$$

因此 $Q_t A = A Q_t$. 然而这个论点需要更进一步的解释, 因为一般地, A 是一个无界算子. 一个重要的事实是如果从 A 去掉一个恒等算子的正倍数, 则算子 A 总有逆存在. 它的逆能由扩散 X_t 显式地表达出来.

定义 8.1.2 对 $\alpha>0$, $g\in C_b(\mathbf{R}^n)$, 定义预解算子 R_α:

$$R_\alpha g(x)=E^x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}g(X_t)dt\right]. \tag{8.1.7}$$

引理 8.1.3 $R_\alpha g$ 是一个有界连续函数.

证明 因为 $R_\alpha g(x)=\int_0^\infty e^{-\alpha t}E^x[g(X_t)]dt$, 则引理 8.1.3 可由下面的结果的直接推导而出.

引理 8.1.4 设 g 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个下有界的可测函数, 对固定的 $t\geqslant 0$, 定义

$$u(x)=E^x[g(X_t)].$$

a) 如果 g 是下半连续的, 那么 u 是下半连续的.

b) 如果 g 有界且连续, 那么 u 是连续的. 换句话说, 任何 Itô 扩散 X_t 都是 Feller 连续的.

证明 由 (5.2.10), 有

$$E[|X_t^x-X_t^y|^2]\leqslant|y-x|^2C(t),$$

这里 $C(t)$ 不依赖于 x 和 y. 设 $\{y_n\}$ 是收敛于 x 的点列. 那么在 $L^2(\Omega,P)$ 中, 当 $n\to\infty$ 时, 有 $X_t^{y_n}\to X_t^x$. 因此存在 $\{y_n\}$ 的子列 $\{z_n\}$, 使得对几乎所有的 $\omega\in\Omega$, $X_t^{z_n}(\omega)\to X_t^x(\omega)$.

a) 如果 g 是下有界及下半连续的, 那么由 Fatou 引理有

$$u(x)=E[g(X_t^x)]\leqslant E[\varliminf_{n\to\infty}g(X_t^{z_n})]\leqslant\varliminf_{n\to\infty}E[g(X_t^{z_n})]=\varliminf_{n\to\infty}u(z_n),$$

因此, 对每个收敛于 x 的序列 $\{y_n\}$, 都存在子列 $\{z_n\}$ 使得 $u(x)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}u(z_n)$. 由此证明了 u 是下半连续的.

b) 如果 g 是有界连续的, a) 中的结果可应用于 g 与 $-g$. 因此 u 与 $-u$ 都是下半连续的, 故此得到 u 是连续的.

下面证明 R_α 和 $\alpha-A$ 互为逆算子.

定理 8.1.5 a) 如果 $f\in C_0^2(\mathbf{R}^n)$, 那么对任意的 $\alpha>0$, $R_\alpha(\alpha-A)f=f$.

b) 如果 $g\in C_b(\mathbf{R}^n)$, 那么对任意的 $\alpha>0$, $R_\alpha g\in\mathcal{D}_A$ 且 $(\alpha-A)R_\alpha g=g$.

证明 a) 如果 $f\in C_0^2(\mathbf{R}^n)$, 那么由 Dynkin 公式有

$$\begin{aligned}
&R_\alpha(\alpha-A)f(x)=(\alpha R_\alpha f-R_\alpha Af)(x)\\
&=\alpha\int_0^\infty e^{-\alpha t}E^x[f(X_t)]dt-\int_0^\infty e^{-\alpha t}E^x[Af(X_t)]dt\\
&=-e^{-\alpha t}E^x[f(X_t)]\,|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{d}{dt}E^x[f(X_t)]dt-\int_0^\infty e^{-\alpha t}E^x[Af(X_t)]dt\\
&=E^x[f(X_0)]=f(x).
\end{aligned}$$

b) 如果 $g \in C_b(\mathbf{R}^n)$, 则由 Markov 性知

$$\begin{aligned}
E^x[R_\alpha g(X_t)] &= E^x\left[E^{X_t}\left[\int_0^\infty e^{-\alpha s} g(X_s)ds\right]\right] \\
&= E^x\left[E^x\left[\theta_t\left(\int_0^\infty e^{-\alpha s} g(X_s)ds\right)|\mathcal{F}_t\right]\right] \\
&= E^x\left[E^x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha s} g(X_{t+s})ds|\mathcal{F}_t\right]\right] \\
&= E^x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha s} g(X_{t+s})ds\right] \\
&= \int_0^\infty e^{-\alpha s} E^x[g(X_{t+s})]ds,
\end{aligned}$$

由分部积分得

$$E^x[R_\alpha g(X_t)] = \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha s} \int_t^{t+s} E^x[g(X_v)]dvds,$$

由这个恒等式知 $R_\alpha g \in \mathcal{D}_A$, 且有

$$A(R_\alpha g) = \alpha R_\alpha g - g.$$

8.2 Feynman-Kac 公式, 消灭

经过较复杂的推导, 可得到下面有用的推广的 Kolmogorov 后向方程.

定理 8.2.1(Feynman-Kac 公式) 设 $f \in C_0^2(\mathbf{R}^n)$, $q \in C(\mathbf{R}^n)$. 假定 q 是下有界的.

a) 设

$$v(t,x) = E^x\left[\exp\left(-\int_0^t q(X_s)ds\right)f(X_t)\right], \tag{8.2.1}$$

那么

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Av - qv, \quad t > 0,\ x \in \mathbf{R}^n, \tag{8.2.2}$$

$$v(0,x) = f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{8.2.3}$$

b) 如果 $w(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n)$ 对每个紧集 $K \subset \mathbf{R}$, 在 $K \times \mathbf{R}^n$ 上是有界的, 且 $w(t,x)$ 是 (8.2.2), (8.2.3) 的解. 那么 $w(t,x) = v(t,x)$ 由式 (8.2.1) 给出.

证明 a) 设 $Y_t = f(X_t)$, $Z_t = \exp\left(-\int_0^t q(X_s)ds\right)$. 那么 dY_t 由式 (7.3.1) 给

出, 且

$$dZ_t = -Z_t q(X_t)dt,$$

由于 $dZ_t \cdot dY_t = 0$, 因此, $d(Y_tZ_t) = Y_t dZ_t + Z_t dY_t$, 注意因为 Y_tZ_t 是一个 Itô 过程, 由引理 7.3.2 有 $v(t,x) = E^x[Y_tZ_t]$ 关于 t 是可微的. 由此可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r}(E^x[v(t,X_r)] - v(t,x)) = \frac{1}{r}E^x[E^{X_r}[Z_t f(X_t)] - E^x[Z_t f(X_t)]] \\
&= \frac{1}{r}E^x\left[E^x\left[\exp\left(-\int_0^t q(X_{s+r})ds\right)f(X_{t+r})|\mathcal{F}_r\right] - E^x[Z_t f(X_t)|\mathcal{F}_r]\right] \\
&= \frac{1}{r}E^x\left[Z_{t+r}\exp\left(\int_0^r q(X_s)ds\right)f(X_{t+r}) - Z_t f(X_t)\right] \\
&= \frac{1}{r}E^x[f(X_{t+r})Z_{t+r} - f(X_t)Z_t] \\
&\quad + \frac{1}{r}E^x\left[f(X_{t+r})Z_{t+r}\cdot\left(\exp\left(\int_0^r q(X_s)ds\right) - 1\right)\right] \\
&\to \frac{\partial}{\partial t}v(t,x) + q(x)v(t,x), \quad \text{当 } r\to 0 \text{ 时}.
\end{aligned}$$

这是因为

$$\frac{1}{r}f(X_{t+r})Z_{t+r}\cdot\left(\exp\left(\int_0^r q(X_s)ds\right) - 1\right) \to f(X_t)Z_t q(X_0)$$

是按点有界收敛. 这样完成了 a) 的证明.

b) 假定 $w(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n)$, 满足 (8.2.2) 和 (8.2.3), 且对每个紧集 $K \subset \mathbf{R}$, 在 $K \times \mathbf{R}^n$ 上是有界的. 那么

$$\hat{A}w(t,x) := -\frac{\partial w}{\partial t} + Aw - qw = 0, \quad t>0,\ x\in\mathbf{R}^n, \tag{8.2.4}$$

$$w(0,x) = f(x), \quad x\in\mathbf{R}^n. \tag{8.2.5}$$

固定 $(s,x,z) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$, 定义 $Z_t = z + \int_0^t q(X_s)ds$, $H_t = (s-t, X_t^{0,x}, Z_t)$, 则 H_t 是一个 Itô 扩散, 其生成元为

$$A_H\phi(s,x,z) = -\frac{\partial\phi}{\partial s} + A\phi + q(x)\frac{\partial\phi}{\partial z}, \quad \phi\in C_0^2(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n),$$

因此由 (8.2.4) 和 Dynkin 公式推得, 对任意的 $t \geqslant 0$, $R > 0$, 及 $\phi(s,x,z) = \exp(-z)w(s,x)$, 有

$$E^{s,x,z}[\phi(H_{t\wedge\tau_R})] = \phi(s,x,z) + E^{s,x,z}\left[\int_0^{t\wedge\tau_R} A_H\phi(H_r)dr\right],$$

这里 $\tau_R = \inf\{t > 0,\ |H_t| \geqslant R\}$.

注意由 ϕ 的选择及 (8.2.4) 可得

$$A_H\phi(s,x,z) = \exp(-z)\left[-\frac{\partial w}{\partial s} + Aw - q(x)w\right] = 0,$$

因此

$$\begin{aligned} w(s,x) &= \phi(s,x,0) = E^{s,x,0}[\phi(H_{t\wedge\tau_R})] \\ &= E^x\left[\exp\left(-\int_0^{t\wedge\tau_R} q(X_r)dr\right)w(s-t\wedge\tau_R, X_{t\wedge\tau_R})\right] \\ &\to E^x\left[\exp\left(-\int_0^t q(X_r)dr\right)w(s-t,X_t)\right], \quad \text{当 } R\to\infty \text{ 时}, \end{aligned}$$

这是因为 $w(r,x)$ 对 $(r,x)\in K\times\mathbf{R}^n$ 是有界的. 特别, 选择 $t=s$, 得到

$$w(s,x) = E^x\left[\exp\left(-\int_0^s q(X_r)dr\right)w(0,X_s^{0,x})\right] = v(s,x),$$

如所要证.

附注(关于扩散的消灭) 在定理 7.3.3 中看到, 如果 Itô 扩散 X_t 是如下形式:

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \tag{8.2.6}$$

则它的生成元是一个如下形式的偏微分算子:

$$Lf = \sum a_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \tag{8.2.7}$$

这里 $[a_{ij}] = \frac{1}{2}\sigma\sigma^T, b=[b_i]$, 它自然会问是否能找到一个过程使得它的生成元有如下形式:

$$Lf = \sum a_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - cf, \tag{8.2.8}$$

这里 $c(x)$ 是一个有界连续函数.

如果 $c(x)\geqslant 0$, 答案是肯定的. 具有生成元 (8.2.8) 的过程 $\tilde{X}_t$ 可通过在某个确定 (消灭) 时间 ζ 消灭 X_t 而得到, 即意味着存在一个随机时间 ζ, 如果设

$$\tilde{X}_t = X_t, \quad \text{如果 } t<\zeta, \tag{8.2.9}$$

而当 $t\geqslant\zeta$ 时, $\tilde{X}_t$ 没有定义 (或者在 $t\geqslant\zeta$ 时, 设 $\tilde{X}_t=\partial$, 这里 $\partial\notin\mathbf{R}^n$ 是某个隐秘状态). 那么 $\tilde{X}_t$ 也是一个强 Markov 过程, 且对 $\mathbf{R}^n$ 上的任意的有界连续函数 f:

$$E^x[f(\tilde{X}_t)] := E^x[f(X_t)\cdot \mathcal{X}_{[0,\zeta)}(t)] = E^x\left[f(X_t)\cdot e^{-\int_0^t c(X_s)ds}\right]. \tag{8.2.10}$$

设 $v(t,x)$ 表示 (8.2.10) 的右边, $f\in C_0^2(\mathbf{R}^n)$. 则由 Feynman-Kac 公式, 有

$$\lim_{t\to 0}\frac{E^x[f(\tilde{X}_t)]-f(x)}{t}=\frac{\partial}{\partial t}v(t,x)_{t=0}=(Av-cv)_{t=0}=Af(x)-c(x)f(x).$$

因此, $\tilde{X}_t$ 的生成元是 (8.2.8), 如所要求. 函数 $c(x)$ 可被解释为消灭速率:

$$c(x)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}Q^x(X_0\text{ 在时间区间 }(0,t]\text{ 内被消灭}).$$

于是应用这样一个消灭过程, 能从 $c=0$ 的特殊情形 (8.2.7) 得到 $c(x)\geqslant 0$ 的一般情形 (8.2.8). 因此只需考虑 (8.2.7) 就足够了.

如果函数 $c(x)\geqslant 0$ 给定, 则使 (8.2.10) 成立的消灭时间 ζ 的一个显式构造可从文献 (Karlin, Taylor, 1981, 第 314 页) 找到. 更一般的讨论见文献 (Blumenthal, Getoor, 1968, 第 3 章).

8.3 鞅 问 题

如果 $dX_t=b(X_t)dt+\sigma(X_t)dB_t$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个 Itô 扩散, 其生成元为 A, $f\in C_0^2(\mathbf{R}^n)$. 则由 (7.3.1) 得

$$f(X_t)=f(x)+\int_0^t Af(X_s)ds+\int_0^t \nabla f^T(X_s)\sigma(X_s)dB_s. \tag{8.3.1}$$

定义

$$M_t=f(X_t)-\int_0^t Af(X_r)dr\ \left(=f(x)+\int_0^t \nabla f^T(X_r)\sigma(X_r)dB_r\right). \tag{8.3.2}$$

因为 Itô 积分为鞅 (关于 σ 代数 $\{\mathcal{F}_t^{(m)}\}$). 对 $s>t$, 有

$$E^x[M_s|\mathcal{F}_t^{(m)}]=M_t,$$

因此, 由 M_t 是 $\mathcal{M}_t$ 可测的推得

$$E^x[M_s|\mathcal{M}_t]=E^x[E^x[M_s|\mathcal{F}_t^{(m)}]|\mathcal{M}_t]=E^x[M_t|\mathcal{M}_t]=M_t.$$

由此证明了下面的定理.

定理 8.3.1　如果 X_t 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个 Itô 扩散, 其生成元为 A, 则对任意的 $f\in C_0^2(\mathbf{R}^n)$, 过程

$$M_t=f(X_t)-\int_0^t Af(X_r)dr$$

相对于 $\{\mathcal{M}_t\}$ 是一个鞅.

如果把每个 $\omega \in \Omega$ 看成函数

$$\omega_t = \omega(t) = X_t^x(\omega),$$

则概率空间 $(\Omega, \mathcal{M}, Q^x)$ 与 $((\mathbf{R}^n)^{[0,\infty)}, \mathcal{B}, \tilde{Q}^x)$ 是相同的. 这里 $\mathcal{B}$ 是 $(\mathbf{R}^n)^{[0,\infty)}$ 上的 Borel σ 代数 (见第 2 章). 因此把 X_t^x 的律看作 $\mathcal{B}$ 上的概率测度 $\tilde{Q}^x$, 则可把定理 8.3.1 看成如下形式:

定理 8.3.1′ 如果 $\tilde{Q}^x$ 是 $\mathcal{B}$ 上的由 Itô 扩散 X_t 的律 Q^x 诱导的概率测度. 则对任意的 $f \in C_0^2(\mathbf{R}^n)$, 过程

$$M_t = f(X_t) - \int_0^t Af(X_r)dr \ (= f(\omega_t) - \int_0^t Af(\omega_r)dr), \quad \omega \in (\mathbf{R}^n)^{[0,\infty)} \tag{8.3.3}$$

是相对于 $(\mathbf{R}^n)^{[0,t)}$ 上的 Borel σ 代数 $\mathcal{B}$ 的 $\tilde{Q}^x$ 鞅. 换句话说, 在下面的意义下, 测度 $\tilde{Q}^x$ 解决了关于微分算子的鞅问题.

定义 8.3.2 设 L 是如下形式的半椭圆型微分算子

$$L = \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j},$$

这里系数 b_i, a_{ij} 是 $\mathbf{R}^n$ 上的局部有界的 Borel 可测函数. 如果对任意的 $f \in C_0^2(\mathbf{R}^n)$, 过程

$$M_t = f(\omega_t) - \int_0^t Lf(\omega_r)dr, \quad M_0 = f(x) \text{ a.s. } \tilde{P}^x$$

是相对于 $\mathcal{B}_t$ 的 $\tilde{P}^x$ 鞅. 那么称 $(\mathbf{R}^n)^{[0,\infty)}$ 上的概率测度 $\tilde{P}^x$ 解决了关于算子 L(初始值为 x) 的鞅问题. 如果存在唯一的一个测度 $\tilde{P}^x$ 解决鞅问题, 则称鞅问题是好处理的.

定理 8.3.1 的论证实际上证明了当 X_t 是随机微分方程

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t \tag{8.3.4}$$

的弱解时, $\tilde{Q}^x$ 解决了关于 A 的鞅问题. 相反地, 能够证明, 如果对任意的初始值 $x \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{P}^x$ 解决下面算子 L 的鞅问题

$$L = \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum (\sigma\sigma^T)_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{8.3.5}$$

那么随机微分方程 (8.3.4) 存在一个弱解 X_t. 而且, 弱解是一个 Markov 过程的充要条件是关于 L 的鞅问题是好处理的 (Strook, Varadhan, 1979; Rogers, Williams, 1987). 因此, 如果 (8.3.4) 的系数 b, σ 满足定理 5.2.1 的条件 (5.2.1), (5.2.2), 得出

$$\tilde{Q}^x \text{ 是关于 (8.3.5) 给出的算子 } L \text{ 的鞅问题的唯一解}, \tag{8.3.6}$$

L 的系数的 Lipschitz 连续性对于鞅问题的唯一性来讲不是必要的. 例如, Strook 和 Varadhan(1979) 的惊人的结果之一是: 如果 $[a_{ij}]$ 是处处正定的, $a_{ij}(x)$ 是连续的, $b(x)$ 是可测的且存在常数 D 使得

$$|b(x)| + |a(x)|^{\frac{1}{2}} \leqslant D(1 + |x|), \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^n,$$

则关于下面算子 L:

$$L = \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

的鞅问题有唯一解.

8.4 Itô 过程什么时候是扩散过程

Itô 公式表明, 如果应用 C^2 函数 $\phi : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 于 Itô 过程 X_t, 则 $\phi(X_t)$ 是另外一个 Itô 过程. 一个自然的问题是: 如果 X_t 是一个 Itô 扩散, $\phi(X_t)$ 也是 Itô 扩散吗? 一般地, 答案是否定的. 但在某些情形它是肯定的.

例 8.4.1(Bessel 过程) 设 $n \geqslant 2$, 在例 4.2.2 中, 过程

$$R_t(\omega) = |B(t, \omega)| = (B_1(t, \omega)^2 + \cdots + B_n(t, \omega)^2)^{\frac{1}{2}}$$

满足方程

$$dR_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i dB_i}{R_t} + \frac{n-1}{2R_t} dt. \tag{8.4.1}$$

然而, 这并非是 (5.2.3) 的随机微分方程形式. 因此从 (8.4.1) 并不能直接看出 R 是 Itô 扩散, 但如果能证明

$$Y_t := \int_0^t \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{|B|} dB_i$$

与 1 维布朗运动 $\tilde{B}_t$ 有相同的律 (即有同样的有限维分布), 则它是 Itô 扩散. 因为此时 (8.4.1) 可改写为

$$dR_t = \frac{n-1}{2R_t} dt + d\tilde{B},$$

它具有 (5.2.3) 的形式, 故由弱唯一性 (见引理 5.3.1), 表明 R_t 是 Itô 扩散. 它的生成元是

$$Af(x) = \frac{1}{2} f''(x) + \frac{n-1}{2x} f'(x).$$

如例 4.2.2 所提及的那样. 要弄清楚过程 Y_t 与 1 维布朗运动 $\tilde{B}_t$ 有相同的律的一个方法是应用下面的结果:

定理 8.4.2 一个 Itô 过程

$$dY_t = vdB_t, \quad Y_0 = 0, \quad v(t,\omega) \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}^{n\times m}$$

与 n 维布朗运动有相同的律的充要条件是

$$vv^T(t,\omega) = I_n. \tag{8.4.2}$$

在测度 $dt \times dP$ 下对几乎所有的 (t,ω) 成立. 这里 I_n 是 n 阶单位矩阵.

注意在上面的例子中, 有

$$Y_t = \int_0^t vdB,$$

其中

$$v = \left[\frac{B_1}{|B|}, \cdots, \frac{B_n}{|B|}\right], \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}.$$

因为 $vv^T = 1$, 得到 Y_t 是 1 维的布朗运动, 如所需要的那样.

定理 8.4.2 是下面结果的特殊情形, 下面结果给出了一个 Itô 过程与给定的 Itô 扩散有相同的律的必要和充分条件 (这里利用符号 $\simeq$ 表示"律相同").

定理 8.4.3 设 X_t 是一个如下的 Itô 扩散:

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad b \in \mathbf{R}^n,\ \sigma \in \mathbf{R}^{n\times m}, \quad X_0 = x.$$

Y_t 是如下的 Itô 过程:

$$dY_t = u(t,\omega)dt + v(t,\omega)dB_t, \quad u \in \mathbf{R}^n,\ v \in \mathbf{R}^{n\times m}, \quad Y_0 = x,$$

那么 $X_t \simeq Y_t$ 的充要条件是: 在测度 $dt \times dP$ 下, 对几乎所有的 (t,ω) 有

$$E^x[u(t,\cdot)|\mathcal{N}_t] = b(Y_t^x), \quad 且\ vv^T(t,\omega) = \sigma\sigma^T(Y_t^x), \tag{8.4.3}$$

这里 $\mathcal{N}_t$ 是由 Y_s; $s \leqslant t$ 生成的 σ 代数.

证明 假如 (8.4.3) 成立, 设

$$A = \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma\sigma^T)_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

是 X_t 的生成元, 对 $f \in C_0^2(\mathbf{R}^n)$. 定义

$$Hf(t,\omega) = \sum_i u_i(t,\omega)\frac{\partial f}{\partial x_i}(Y_t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(vv^T)_{ij}(t,\omega)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Y_t).$$

则由 Itô 公式 (见 (7.3.1)) 和 (8.4.3), 对 $s > t$, 有

$$
\begin{aligned}
E^x[f(Y_s)|\mathcal{N}_t] &= f(Y_t) + E^x\left[\int_t^s Hf(r,\omega)dr|\mathcal{N}_t\right] + E^x\left[\int_t^s \nabla f^T v dB_r|\mathcal{N}_t\right] \\
&= f(Y_t) + E^x\left[\int_t^s E^x[Hf(r,\omega)|\mathcal{N}_r]dr|\mathcal{N}_t\right] \\
&= f(Y_t) + E^x\left[\int_t^s Af(Y_r)dr|\mathcal{N}_t\right], \qquad (8.4.4)
\end{aligned}
$$

这里 E^x 表示关于 Y_t 的律 R^x 的期望 (见引理 7.3.2). 因此, 如果定义

$$
M_t = f(Y_t) - \int_0^t Af(Y_r)dr, \qquad (8.4.5)
$$

则对 $s > t$, 有

$$
\begin{aligned}
E^x[M_s|\mathcal{N}_t] &= f(Y_t) + E^x\left[\int_t^s Af(Y_r)dr|\mathcal{N}_t\right] - E^x\left[\int_0^s Af(Y_r)dr|\mathcal{N}_t\right] \\
&= f(Y_t) - E^x\left[\int_0^t Af(Y_r)dr|\mathcal{N}_t\right] = M_t,
\end{aligned}
$$

故 M_t 关于 σ 代数 $\mathcal{N}_t$ 及其律 R^x 为鞅. 由鞅问题的解的唯一性 (见 (8.3.6)), 得出 $X_t \simeq Y_t$.

相反, 假如 $X_t \simeq Y_t$, 选择 $f \in C_0^2$, 由 Itô 公式 (7.3.1) 知, 在测度 $dt \times dP$ 下, 对几乎所有的 (t,ω), 有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}(E^x[f(Y_{t+h})|\mathcal{N}_t] - f(Y_t)) \\
&= \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h} E^x\left[\sum_i u_i(s,\omega)\frac{\partial f}{\partial x_i}(Y_s)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(vv^T)_{ij}(s,\omega)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Y_s)|\mathcal{N}_t\right]ds\right) \qquad (8.4.6) \\
&= \sum_i E^x[u_i(t,\omega)|\mathcal{N}_t]\frac{\partial f}{\partial x_i}(Y_t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} E^x[(vv^T)_{ij}(t,\omega)|\mathcal{N}_t]\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Y_t). \qquad (8.4.7)
\end{aligned}
$$

另一方面, 由于 $X_t \simeq Y_t$, 可知 Y_t 是一个 Markov 过程. 因此 (8.4.6) 与下式一致

$$
\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}(E^{Y_t}[f(Y_h)] - E^{Y_t}[f(Y_0)])
$$

$$= \sum_i E^{Y_t}\left[u_i(0,\omega)\frac{\partial f}{\partial x_i}(Y_0)\right] + \frac{1}{2}\sum_{i,j} E^{Y_t}\left[(vv^T)_{ij}(0,\omega)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Y_0)\right]$$

$$= \sum_i E^{Y_t}[u_i(0,\omega)]\frac{\partial f}{\partial x_i}(Y_t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} E^{Y_t}[(vv^T)_{ij}(0,\omega)]\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Y_t). \tag{8.4.8}$$

比较 (8.4.7) 与 (8.4.8) 可得出, 对几乎所有的 (t,ω),

$$E^x[u(t,\omega)|\mathcal{N}_t] = E^{Y_t}[u(0,\omega)], \quad 且\ E^x[vv^T(t,\omega)|\mathcal{N}_t] = E^{Y_t}[vv^T(0,\omega)]. \tag{8.4.9}$$

另外, 由于 Y_t 的生成元与 X_t 的生成元 A 相同, 从 (8.4.8) 得出, 对几乎所有的 (t,ω),

$$E^{Y_t}[u(0,\omega)] = b(Y_t), \quad 且\ E^{Y_t}[vv^T(0,\omega)] = \sigma\sigma^T(Y_t). \tag{8.4.10}$$

结合 (8.4.9) 和 (8.4.10) 得出, 对几乎所有的 (t,ω),

$$E^x[u|\mathcal{N}_t] = b(Y_t), \quad 且\ E^x[vv^T|\mathcal{N}_t] = \sigma\sigma^T(Y_t). \tag{8.4.11}$$

利用 $vv^T(t,\cdot)$ 总是 $\mathcal{N}_t$ 可测的事实, 可得到 (8.4.3).

$vv^T(t,\cdot)$ 是 $\mathcal{N}_t$ 可测的是在下面的意义下进行的.

引理 8.4.4 设 $dY_t = u(t,\omega)dt + v(t,\omega)dB_t$, $Y_0 = x$ 如定理 8.4.3 中一样. 那么存在一个 $\mathcal{N}_t$ 适应过程 $W(t,\omega)$, 使得对几乎所有的 (t,ω),

$$vv^T(t,\omega) = W(t,\omega).$$

证明 由 Itô 引理知 (如果 $Y_i(t,\omega)$ 表示 $Y(t,\omega)$ 的第 i 个分量)

$$Y_iY_j(t,\omega) = x_ix_j + \int_0^t Y_i dY_j(s) + \int_0^t Y_j dY_i(s) + \int_0^t (vv^T)_{ij}(s,\omega)ds,$$

如果设

$$H_{ij}(t,\omega) = Y_iY_j(t,\omega) - x_ix_j - \int_0^t Y_i dY_j - \int_0^t Y_j dY_i, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n,$$

那么 H_{ij} 是 $\mathcal{N}_t$ 适应的, 且

$$H_{ij}(t,\omega) = \int_0^t (vv^T)_{ij}(s,\omega)ds,$$

因此, 对几乎所有的 t,

$$(vv^T)_{ij}(t,\omega) = \lim_{r\downarrow 0}\frac{H(t,\omega) - H(t-r,\omega)}{r},$$

这样证明了引理 (8.4.4), 由此定理 8.4.3 得证.

附注 1) 人们可能会问 $u(t,\omega)$ 是否一定要是 $\mathcal{N}_t$ 可测的. 然而下面的例子表明即使在 $v=n=1$ 的情形, 也未必有 $u(t,\cdot)$ 是 $\mathcal{N}_t$ 可测的.

设 B_1, B_2 是两个独立的 1 维布朗运动, 定义

$$dY_t = B_1(t)dt + dB_2(t),$$

那么可认为 Y_t 是过程 $B_1(t)$ 的噪声观测值. 因此, 由例 6.2.10 有

$$E[(B_1(t,\omega) - \hat{B}_1(t,\omega))^2] = \tanh(t),$$

这里 $\hat{B}_1(t,\omega) = E[B_1(t)|\mathcal{N}_t]$ 是 Kalman-Bucy 滤波器. 特别, $B_1(t,\omega)$ 不是 $\mathcal{N}_t$ 可测的.

2) 过程 $v(t,\omega)$ 也不必是 $\mathcal{N}_t$ 适应的. 设 B_t 为 1 维布朗运动, 定义

$$dY_t = \mathrm{sign}(B_t)dB_t, \tag{8.4.12}$$

这里

$$\mathrm{sign}(z) = \begin{cases} 1, & z>0; \\ -1, & z \leqslant 0. \end{cases}$$

Tanaka 公式表明

$$|B_t| = |B_0| + \int_0^t \mathrm{sign}(B_s)dB_s + L_t, \tag{8.4.13}$$

这里 $L_t = L_t(\omega)$ 是 B_t 在 0 点的局部时, 它为非减过程, 当 $B_t = 0$ 时, 为增的 (见练习 4.10). 因此由 $\{Y_s;\ s \leqslant t\}$ 生成的 σ 代数 $\mathcal{N}_t$ 是包含于由 $\{|B_s|;\ s \leqslant t\}$ 生成的 σ 代数 $\mathcal{H}_t$ 内. 由此 $v(t,\omega) = \mathrm{sign}(B_t)$ 不是 $\mathcal{N}_t$ 适应的.

推论 8.4.5(如何识别布朗运动) 设 $dY_t = u(t,\omega)dt + v(t,\omega)dB_t$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个 Itô 过程. 那么 Y_t 是布朗运动的充要条件是

$$E^x[u(t,\cdot)|\mathcal{N}_t] = 0, \quad vv^T(t,\omega) = I_n \tag{8.4.14}$$

对几乎所有的 (t,ω) 成立.

附注 利用定理 8.4.3, 可以研究在什么情形下, 一个 C^2 函数 ϕ 作用于 Itô 扩散 X_t, 得到的像 $Y_t = \phi(X_t)$ 与 Itô 扩散 Z_t 有相同的律. 应用 (8.4.3) 的规则, 可得到下面的结果:

$$\phi(X_t) \simeq Z_t \text{ 当且仅当 } A[f\circ\phi] = \hat{A}[f]\circ\phi \tag{8.4.15}$$

对任意的二次多项式 $f(x_1,\cdots,x_n) = \sum a_i x_i + \sum c_{ij}x_i x_j$ 成立 (因此, 对任意的 $f \in c_0^2$ 也成立) 这里 A 和 $\hat{A}$ 是相应于 X_t 和 Z_t 的生成元 ($\circ$ 表示函数的复合: $(f\circ\phi)(x) = f(\phi(x))$). 对这个结果的推广见文献 (Csink, ØKsendal, 1983; Csink, Fitzsimmons, ØKsendal, 1990).

8.5 随机时变

设 $c(t,\omega) \geqslant 0$ 是一个 $\mathcal{F}_t$ 适应过程. 定义

$$\beta_t = \beta(t,\omega) = \int_0^t c(s,\omega)ds, \tag{8.5.1}$$

称 β_t 是一个 (随机) 时变, 且时变率为 $c(t,\omega)$.

注意 $\beta(t,\omega)$ 也是 $\mathcal{F}_t$ 适应的, 且对每个 ω, 映射 $t \to \beta_t(\omega)$ 是递增的, 记 $\alpha_t = \alpha(t,\omega)$, 其中

$$\alpha_t = \inf\{s;\ \beta_s > t\}, \tag{8.5.2}$$

则 α_t 是 β_t 的右逆, 对每个 ω,

$$\beta(\alpha(t,\omega),\omega) = t, \quad \forall\, t \geqslant 0, \tag{8.5.3}$$

而且 $t \to \alpha_t(\omega)$ 是右连续的.

如果对几乎所有的 (s,ω), $c(s,\omega) > 0$, 则 $t \to \beta_t(\omega)$ 是严格递增的. $t \to \alpha_t(\omega)$ 是连续的, 且 α_t 也是 β_t 的左逆:

$$\alpha(\beta(t,\omega),\omega) = t, \quad \forall\, t \geqslant 0. \tag{8.5.4}$$

对每个 t, 一般 $\omega \to \alpha(t,\omega)$ 是一个 $\mathcal{F}_s$ 停时. 这是因为

$$\{\omega : \alpha(t,\omega) < s\} = \{\omega : t < \beta(s,\omega)\} \in \mathcal{F}_s. \tag{8.5.5}$$

现在要问: 假如 X_t 是一个 Itô 扩散, Y_t 是如定理 8.4.3 的一个 Itô 过程. 什么时候存在一个时变 β_t, 使得 $Y_{\alpha_t} \simeq X_t$? (注意, α_t 仅定义到时间 β_∞, 如果 $\beta_\infty < \infty$, 解释 $Y_{\alpha_t} \simeq X_t$ 意味着 Y_{α_t} 与 X_t 在直到时间 β_∞ 内有相同的律).

下面是一部分答案 (Øksendal, 1990).

定理 8.5.1 设 X_t, Y_t 如定理 8.4.3 中一样. β_t 是一个时变, 且有右逆 α_t, 如 (8.5.1), (8.5.2). 假定对几乎所有的 (t,ω),

$$u(t,\omega) = c(t,\omega)b(Y_t),\ vv^T(t,\omega) = c(t,\omega)\cdot\sigma\sigma^T(Y_t), \tag{8.5.6}$$

那么

$$Y_{\alpha_t} \simeq X_t.$$

下面的这个结论容许我们去识别布朗运动的时变.

定理 8.5.2 设 $dY_t = v(t,\omega)dB_t$, $v \in \mathbf{R}^{n\times m}$, $B_t \in \mathbf{R}^m$, 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 Itô 积分, $Y_0 = 0$. 假定对某个过程 $c(t,\omega) \geqslant 0$, 有

$$vv^T(t,\omega) = c(t,\omega)I_n. \tag{8.5.7}$$

设 α_t, β_t 如 (8.5.1), (8.5.2). 那么

$$Y_{\alpha_t}\text{是一个 } n \text{ 维布朗运动}.$$

推论 8.5.3 设 $dY_t = \sum_{i=1}^{n} v_i(t,\omega)dB_i(t,\omega)$, $Y_0 = 0$, 这里 $B = (B_1, \cdots, B_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的布朗运动, 那么

$$\hat{B}_t := Y_{\alpha_t} \text{ 是一个 1 维布朗运动},$$

这里 α_t 如定义 (8.5.2),

$$\beta_s = \int_0^s \left\{\sum_{i=1}^{n} v_i^2(r,\omega)\right\} dr. \tag{8.5.8}$$

推论 8.5.4 设 Y_t, β_s 如推论 8.5.3, 假定对几乎所有的 (r,ω),

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2(r,\omega) > 0, \tag{8.5.9}$$

那么存在一个布朗运动 $\hat{B}_t$ 使得

$$Y_t = \hat{B}_{\beta_t}. \tag{8.5.10}$$

证明 设

$$\hat{B}_t = Y_{\alpha_t} \tag{8.5.11}$$

是由推论 8.5.3 中得到的布朗运动, 由 (8.5.9) 知 β_t 是严格递增的, 于是 (8.5.4) 成立. 在 (8.5.11) 中选择 $t = \beta_s$, 则得到 (8.5.10).

推论 8.5.5 给定 $c(t,\omega) \geqslant 0$, 定义

$$Y_t = \int_0^t \sqrt{c(s,\omega)}dB_s,$$

这里 B_s 是一个 n 维布朗运动, 那么

$$Y_{\alpha_t} \text{ 也是一个 } n \text{ 维布朗运动}.$$

现在利用它证明一个 Itô 积分的时变又是一个 Itô 积分, 但由不同的布朗运动 $\tilde{B}_t$ 驱动. 首先构造 $\tilde{B}_t$.

引理 8.5.6 假设 $s \to \alpha(s,\omega)$ 是连续的, $\alpha(0,\omega)=0$ 对几乎所有的 ω 成立. 固定 $t>0$, 使得 $\beta_t<\infty$ a.s., 假定 $E[\alpha_t]<\infty$. 对 $k=1,2,\cdots$, 记

$$t_j=\begin{cases} j\cdot 2^{-k}, & j\cdot 2^{-k}\leqslant \alpha_t, \\ t, & j\cdot 2^{-k}>\alpha_t. \end{cases}$$

选择 r_j 使得 $\alpha_{r_j}=t_j$. 设 $f(t,\omega)\geqslant 0$ 是 $\mathcal{F}_s$ 适应的、有界的及对几乎所有的 ω 是 s 连续的. 那么

$$\lim_{k\to\infty}\sum_j f(\alpha_j,\omega)\Delta B_{\alpha_j}=\int_0^{\alpha_t} f(s,\omega)dB_s \text{ a.s.}, \tag{8.5.12}$$

这里 $\alpha_j=\alpha_{r_j}$, $\Delta B_{\alpha_j}=B_{\alpha_{j+1}}-B_{\alpha_j}$. 极限是在 $L^2(\Omega,P)$ 中的极限.

证明 对任意的 k, 有

$$\begin{aligned} &E\left[\left(\sum_j f(\alpha_j,\omega)\Delta B_{\alpha_j}-\int_0^{\alpha_t} f(s,\omega)dB_s\right)^2\right] \\ =&E\left[\left(\sum_j \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} f(\alpha_j,\omega)-f(s,\omega)dB_s\right)^2\right] \\ =&\sum_j E\left[\left(\int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} f(\alpha_j,\omega)-f(s,\omega)dB_s\right)^2\right] \\ =&\sum_j E\left[\int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}}(f(\alpha_j,\omega)-f(s,\omega))^2ds\right]=E\left[\int_0^{\alpha_t}(f-f_k)^2ds\right], \end{aligned}$$

这里 $f_k(s,\omega)=\sum_j f(t_j,\omega)\mathcal{X}_{[t_j,t_{j+1})}(s)$ 是 f 的初等近似 (见推论 3.1.8). 由此推得 (8.5.12).

现在利用它去建立一个关于 Itô 积分的一般时变公式. 在 $n=m=1$ 时的另外的一个证明方法见文献 (Mckean, 1969, 第 2.8 节).

定理 8.5.7(Itô 积分的时变公式) 假定 $c(s,\omega)$ 和 $\alpha(s,\omega)$ 是 s 连续的, 对几乎所有的 ω, $\alpha(0,\omega)=0$, $E[\alpha_t]<\infty$. 设 B_s 是一个 m 维布朗运动, 且设 $v(s,\omega)\in\mathcal{V}_{\mathcal{H}}^{n\times m}$ 是有界的且 s 连续的. 定义

$$\tilde{B}_t=\lim_{k\to\infty}\sum_j\sqrt{c(\alpha_j,\omega)}\Delta B_{\alpha_j}=\int_0^{\alpha_t}\sqrt{c(s,\omega)}dB_s, \tag{8.5.13}$$

那么 $\tilde{B}_t$ 是一个 (m 维)$\mathcal{F}_{\alpha_t}^{(m)}$ 布朗运动 (即 $\tilde{B}_t$ 是一个布朗运动, 且是一个 $\mathcal{F}_{\alpha_t}^{(m)}$ 鞅), 且有

$$\int_0^{\alpha_t} v(s,\omega)dB_s=\int_0^t v(\alpha_r,\omega)\sqrt{\alpha_r'(\omega)}d\tilde{B}_r \text{ a.s.}P, \tag{8.5.14}$$

这里 $\alpha_r'(\omega)$ 是 $\alpha(r,\omega)$ 关于 r 的偏导, 因此有

$$\alpha_r'(\omega) = \frac{1}{c(\alpha_r,\omega)}, \text{ 对几乎所有的 } r \geqslant 0 \text{ 及几乎所有的 } \omega \in \Omega. \tag{8.5.15}$$

证明　式 (8.5.13) 中的极限的存在性和 (8.5.13) 中的第二个等式, 可通过应用引理 8.5.6 于函数 $f(s,\omega) = \sqrt{c(s,\omega)}$ 得到. 再由推论 8.5.5 可知 $\tilde{B}_t$ 是一个 $\mathcal{F}_{\alpha_t}^{(m)}$ 布朗运动. 余下只需证明 (8.5.14):

$$\begin{aligned}
\int_0^{\alpha_t} v(s,\omega)dB_s &= \lim_{k\to\infty}\sum_j v(\alpha_j,\omega)\Delta B_{\alpha_j} \\
&= \lim_{k\to\infty}\sum_j v(\alpha_j,\omega)\sqrt{\frac{1}{c(\alpha_j,\omega)}}\sqrt{c(\alpha_j,\omega)}\Delta B_{\alpha_j} \\
&= \lim_{k\to\infty}\sum_j v(\alpha_j,\omega)\sqrt{\frac{1}{c(\alpha_j,\omega)}}\Delta \tilde{B}_j \\
&= \int_0^t v(\alpha_r,\omega)\sqrt{\frac{1}{c(\alpha_r,\omega)}}d\tilde{B}_r,
\end{aligned}$$

由此得证.

例 8.5.8($\mathbf{R}^n$ 中单位球面上的布朗运动; $n > 2$)　在例 5.1.4 和例 7.5.5 中, 构造了单位圆周上的布朗运动. 把该构造方法延伸到 $\mathbf{R}^n, n \geqslant 3$ 中去获得单位球面 S 上的布朗运动, 却不是显而易见的事情. 然而可通过如下过程去得到: 定义函数: $\phi : \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \to S$,

$$\phi(x) = x \cdot |x|^{-1}, \quad x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\},$$

把它应用到 n 维布朗运动 $B = (B_1, \cdots, B_n)$ 上, 得到一个随机积分 $Y = (Y_1, \cdots, Y_n) = \phi(B)$, 由 Itô 公式可得

$$dY_i = \frac{|B|^2 - B_i^2}{|B|^3}dB_i - \sum_{j\neq i}\frac{B_jB_i}{|B|^3}dB_j - \frac{n-1}{2}\frac{B_i}{|B|^3}dt, \quad i = 1,2,\cdots,n, \tag{8.5.16}$$

因此

$$dY = \frac{1}{|B|}\cdot\sigma(Y)dB + \frac{1}{|B|^2}b(Y)dt,$$

这里

$$\sigma = [\sigma_{ij}] \in \mathbf{R}^{n\times n}, \quad \sigma_{ij}(Y) = \delta_{ij} - Y_iY_j, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n,$$

$$b(y) = -\frac{n-1}{2}\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \ \mathbf{R}^n, \quad (y_1, \cdots, y_n \text{ 是 } y \in \mathbf{R}^n \text{的坐标}).$$

现进行时变. 定义

$$Z_t(\omega) = Y_{\alpha(t,\omega)}(\omega),$$

这里

$$\alpha_t = \beta_t^{-1}, \quad \beta(t,\omega) = \int_0^t \frac{1}{|B|^2} ds,$$

那么 Z 又是一个 Itô 过程, 且由定理 8.5.7 有

$$dZ = \sigma(z)d\tilde{B} + b(Z)dt,$$

因此 Z 是一个扩散, 其特征算子为

$$\mathcal{A}f(y) = \frac{1}{2}\left(\Delta f(y) - \sum_{i,j} y_i y_j \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}\right) - \frac{n-1}{2} \cdot \sum_i y_i \frac{\partial f}{\partial y_i}, \quad |y| = 1, \tag{8.5.17}$$

故 $\phi(B) = \dfrac{B}{|B|}$ 在经过一个适当的时变之后, 等于 $\mathbf{R}^n$ 中的单位球面 S 上的一个扩散 Z. 注意 Z 经过 $\mathbf{R}^n$ 中的正交变换后是不变的 (因为 B 也如此). 称 Z 是单位球面 S 上的布朗运动是合理的. 其他的构造方法见文献 (Itô , Mckean, 1965, P269; Stroock, 1971).

更一般地, 给定 Riemann 流形 M 及度量张量 $g = [g_{ij}]$, 可以定义 M 上的布朗运动, 它是 M 上的一个扩散. 其特征算子 $\mathcal{A}$ 在局部坐标 x_i 处是由 $\dfrac{1}{2}$ 乘以 Laplace-Beltrami 算子 (这里 $[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1}$) 而得到,

$$\Delta_M = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \cdot \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{\det(g)} \sum_j g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\right). \tag{8.5.18}$$

可参考文献 (Meyer, 1966, P256-270; Mckean, 1969,4.3). 流形上的随机微分方程可参考文献 (Ikeda, Watanabe, 1989; Emery, 1989; Elworthy, 1982).

例 8.5.9(调和与解析函数) 设 $B = (B_1, B_2)$ 是 2 维布朗运动. 如果应用一个 C^2 函数

$$\phi(x_1, x_2) = (u(x_1, x_2),\ v(x_1, x_2))$$

于 B 上, 看会发生什么? 设 $Y = (Y_1, Y_2) = \phi(B_1, B_2)$, 由 Itô 公式得

$$dY_1 = u_1'(B_1, B_2)dB_1 + u_2'(B_1, B_2)dB_2 + \frac{1}{2}[u_{11}''(B_1, B_2) + u_{22}''(B_1, B_2)]dt,$$

$$dY_2 = v_1'(B_1, B_2)dB_1 + v_2'(B_1, B_2)dB_2 + \frac{1}{2}[v_{11}''(B_1, B_2) + v_{22}''(B_1, B_2)]dt,$$

这里 $u_1' = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}$, 其他类似. 因此

$$dY = b(B_1, B_2)dt + \sigma(B_1, B_2)dB,$$

其中 $b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} u_1' & u_2' \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix} = D_\phi$ (ϕ的导数). 由此, 当 (事实上也只有这样)ϕ 是调和的, 即 $\Delta\phi = 0$, 则 $Y = \phi(B_1, B_2)$ 是一个鞅, 且由推论 8.5.3 可得到

$$\phi(B_1,\ B_2) = (\tilde{B}^{(1)}_{\beta_1},\ \tilde{B}^{(2)}_{\beta_2}),$$

这里 $\tilde{B}^{(1)}$ 和 $\tilde{B}^{(2)}$) 是两个 (不必独立的)1 维布朗运动的修正, 且

$$\beta_1(t,\omega) = \int_0^t |\nabla u|^2(B_1, B_2)ds, \quad \beta_2(t,\omega) = \int_0^t |\nabla v|^2(B_1, B_2)ds,$$

由于

$$\sigma\sigma^T = \begin{pmatrix} |\nabla u|^2 & \nabla u \cdot \nabla v \\ \nabla u \cdot \nabla v & |\nabla v|^2 \end{pmatrix}.$$

如果 (附加 $\Delta u = \Delta v = 0$)

$$|\nabla u|^2 = |\nabla v|^2, \quad \nabla u \cdot \nabla v = 0, \tag{8.5.19}$$

那么

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma dB,$$

其中

$$\sigma\sigma^T = |\nabla u|^2(B_1, B_2)I_2, \quad Y_0 = \phi(B_1(0), B_2(0)).$$

如果设

$$\beta_t = \beta(t,\omega) = \int_0^t |\nabla u|^2(B_1, B_2)ds, \quad \alpha_t = \beta_t^{-1},$$

则由定理 8.5.2 得到 Y_{α_t} 是一个 2 维布朗运动. 条件 (8.5.19) 及附加条件 $\Delta u = \Delta v = 0$, 可容易看出等价于要求函数 $\phi(x+iy) = \phi(x,y)$ 作为复函数是解析的或共轭解析的.

因此证明了 Levy 的一个定理: $\phi(B_1, B_2)$ 经过一个时间尺度变换后, 还是平面上的布朗运动的充要条件是 ϕ 是解析的或共轭解析的. 上述结果的推广见文献 (Bernard, Campbell, Davie, 1979; Csink, Øksendal, 1983; Csink, Fitzsimmons, Øksendal, 1990).

8.6 Girsanov 定理

在本章最后讨论 Girsanov 定理, 它是随机分析的理论基础, 也有很多重要的应用, 如在经济学方面 (见第 12 章).

Girsanov 定理主要是说, 对给定的 Itô 过程 (具有非退化的扩散系数), 如果改变其漂移系数, 则过程的律不会急剧地变化. 事实上, 新过程的律关于原过程的律是绝对连续的, 且可显式地计算其 Radon-Nikodym 导数.

下面详细地进行介绍. 首先叙述 (而不加证明) 布朗运动的一个有用的 Levy 特征, 它的证明可参考文献 (Ikeda, Watanabe, 1989, 定理 II.6.1; Karatzas, Shreve, 1991, 定理 3.3.16).

定理 8.6.1(布朗运动的 Levy 特征) 设 $X_t=(X_1(t),\cdots,X_n(t))$ 是概率空间 $(\Omega,\mathcal{H},Q)$ 上的 $\mathbf{R}^n$ 中取值的连续随机过程. 则下面的 a) 与 b) 等价:

a) $X(t)$ 相对于 Q 是一个布朗运动, 即 $X(t)$ 相对于 Q 的律与 n 维布朗运动的律相同.

b) (i) $X(t)=(X_1(t),\cdots,X_n(t))$ 相对于 Q 是一个鞅 (相对于它自己的流).

(ii) 对任意的 $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$, $X_i(t)X_j(t)-\delta_{ij}t$ 相对于 Q 是一个鞅 (相对于它自己的流).

附注 在上述定理中, 可用以下条件 (ii)′ 代替条件 (ii).

(ii)′ 交互变差过程 $\langle X_i,X_j\rangle_t$ 满足恒等式:

$$\langle X_i,X_j\rangle_t(\omega)=\delta_{ij}t \text{ a.s.},\quad 1\leqslant i,j\leqslant n, \tag{8.6.1}$$

这里

$$\langle X_i,X_j\rangle_t=\frac{1}{4}[\langle X_i+X_j,X_i+X_j\rangle_t-\langle X_i-X_j,X_i-X_j\rangle_t], \tag{8.6.2}$$

$\langle Y,Y\rangle_t$ 是平方变差过程 (见练习 4.7).

下面需要一个关于条件期望的结果.

引理 8.6.2(Bayes 规则) 设 μ 和 ν 是可测空间 $(\Omega,\mathcal{G})$ 上的两个概率测度, 且存在某个 $f\in L^1(\mu)$ 使得 $d\nu(\omega)=f(\omega)d\mu(\omega)$. X 是 $(\Omega,\mathcal{G})$ 上的一个随机变量, 使得

$$E_\nu[|X|]=\int_\Omega |X(\omega)|f(\omega)d\mu(\omega)<\infty,$$

设 $\mathcal{H}$ 是一个 σ 代数, $\mathcal{H}\subset\mathcal{G}$, 那么

$$E_\nu[X|\mathcal{H}]\cdot E_\mu[f|\mathcal{H}]=E_\mu[fX|\mathcal{H}] \text{ a.s.} \tag{8.6.3}$$

证明 由条件期望的定义 (附录 B), 如果 $H\in\mathcal{H}$, 那么

$$\begin{aligned}\int_H E_\nu[X|\mathcal{H}]fd\mu&=\int_H E_\nu[X|\mathcal{H}]d\nu=\int_H Xd\nu\\&=\int_H Xfd\mu=\int_H E_\mu[fX|\mathcal{H}]d\mu.\end{aligned} \tag{8.6.4}$$

另一方面, 由定理 B.3(附录 B) 有

$$\begin{aligned}\int_H E_\nu[X|\mathcal{H}]fd\mu &= E_\nu[E_\mu[X|\mathcal{H}]f\cdot\mathcal{X}_H] = E_\mu[E_\mu[E_\nu[X|\mathcal{H}]f\cdot\mathcal{X}_H|\mathcal{H}]]\\ &= E_\mu[\mathcal{X}_H E_\nu[X|\mathcal{H}]\cdot E_\mu[f|\mathcal{H}]] = \int_H E_\nu[X|\mathcal{H}]\cdot E_\mu[f|\mathcal{H}]d\mu. \quad (8.6.5)\end{aligned}$$

结合 (8.6.4) 与 (8.6.5) 可知, 对任意的 $H\in\mathcal{H}$,

$$\int_H E_\nu[X|\mathcal{H}]\cdot E_\mu[f|\mathcal{H}]d\mu = \int_H E_\mu[fX|\mathcal{H}]d\mu,$$

因此结论 (8.6.3) 成立.

在叙述 Girsanov 定理之前, 介绍一点关于测度的绝对连续性的知识.

设 $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \{\mathcal{F}\}_{t\geqslant 0}, P)$ 是一个流概率空间 (即 $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ 是一个概率空间, $\{\mathcal{F}\}_{t\geqslant 0}$ 是 $(\Omega,\ \mathcal{F})$ 上的流). 固定 $T>0$, 设 Q 是 $\mathcal{F}_T$ 上的另一个概率测度. 如果满足

$$P(H)=0\Rightarrow Q(H)=0, \quad \forall\, H\in\mathcal{F}_T,$$

则称 Q 相对于 $P\,|_{\mathcal{F}_T}$(P 在 $\mathcal{F}_T$ 上的限制) 是绝对连续的, 记作 $Q\ll P$. 由 Radon-Nikodym 定理, 它等价于存在一个 $\mathcal{F}_T$ 可测的随机变量 $Z_T(\omega)\geqslant 0$, 在 $\mathcal{F}_T$ 上有

$$dQ(\omega) = Z_T(\omega)dP(\omega),$$

此时记作

$$\frac{dQ}{dP} = Z_T, \quad \text{在 } \mathcal{F}_T \text{ 上},$$

称 Z_T 是 Q 相对于 P 的 Radon-Nikodym 导数.

下面的引理可看作 Girsanov 定理的部分弱逆命题.

引理 8.6.3　设 $Q\ll P\,|_{\mathcal{F}_T}$, 在 $\mathcal{F}_T$ 上 $\dfrac{dQ}{dP}=Z_T$, 那么对任意的 $t\in[0,T]$, $Q\,|_{\mathcal{F}_t}\ll P\,|_{\mathcal{F}_t}$. 如果定义

$$Z_t := \frac{d(Q\,|_{\mathcal{F}_t})}{d(P\,|_{\mathcal{F}_t})},$$

则 Z_t 相对于 $\mathcal{F}_t$ 和 P 是一个鞅.

证明　因为在 $\mathcal{F}_T$ 上 $Q\ll P$, $\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}_T$, 显然在 $\mathcal{F}_t$ 上有 $Q\ll P$, 选择 $F\in\mathcal{F}_t$, 则

$$\begin{aligned}E_P[\mathcal{X}_F\cdot E_P[Z_T|\mathcal{F}_t]] &= E_P[E_P[\mathcal{X}_F\cdot Z_T|\mathcal{F}_t]]\\ &= E_P[\mathcal{X}_F\cdot Z_T] = E_Q[\mathcal{X}_F] = E_P[\mathcal{X}_F\cdot Z_t].\end{aligned}$$

因为对任意的 $F \in \mathcal{F}_t$ 成立, 故此得出

$$E_P[Z_T|\mathcal{F}_t] = Z_t \text{ a.s. } P|_{\mathcal{F}_t}.$$

定理 8.6.4(Girsanov 定理 I) 设 $Y_t \in \mathbf{R}^n$ 是如下形式的 Itô 过程:

$$dY(t) = a(t,\omega)dt + dB(t), \quad t \leqslant T,\ Y_0 = 0,$$

这里 $T \leqslant \infty$ 是给定的常数, $B(t)$ 是 n 维布朗运动. 设

$$M_t = \exp\left(-\int_0^t a(s,\omega)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t a^2(s,\omega)ds \right), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{8.6.6}$$

假定 M_t 关于 $\mathcal{F}_t^{(n)}$ 和 P 为鞅, 定义 $\mathcal{F}_T^{(n)}$ 上的测度 Q 如下:

$$dQ(\omega) = M_T(\omega)dP(\omega), \tag{8.6.7}$$

则 Q 是 $\mathcal{F}_T^{(n)}$ 上的概率测度, 且对 $0 \leqslant t \leqslant T$, $Y(t)$ 相对于 Q 为 n 维布朗运动.

附注 (1) 由 (8.6.7) 给出的变换 $P \to Q$ 称为 Girsanov 测度变换.

(2) 如练习 4.4 所指出的那样, 下面的 Novikov 条件 (8.6.8) 足够保证 $\{M_t\}_{t \leqslant T}$ 为鞅 (关于 $\mathcal{F}_t^{(n)}$ 和 P)

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T a^2(s,\omega)ds \right) \right] < \infty, \tag{8.6.8}$$

这里 $E = E_P$ 是相对于 P 的期望.

(3) 注意由于 M_t 是鞅, 实际上有

$$M_T dP = M_t dP, \quad \text{在 } \mathcal{F}_t^{(n)} \text{上};\ t \leqslant T. \tag{8.6.9}$$

为了明白这点, 设 f 是 $\mathcal{F}_t^{(n)}$ 可测的有界函数, 则由定理 B.3 有

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(\omega)M_T(\omega)dP(\omega) &= E[fM_T] = E[E[fM_T|\mathcal{F}_t]] \\ &= E[fE[M_T|\mathcal{F}_t]] = E[fM_t] = \int_\Omega f(\omega)M_t(\omega)dP(\omega).\end{aligned}$$

定理 8.6.4 的证明 因为 M_t 是鞅, 有

$$Q(\Omega) = E_Q[1] = E_P[M_T] = 1,$$

因此 Q 是概率测度, 为简便起见, 假定 $a(s,\omega)$ 是有界的. 由定理 8.6.1, 必须证明

(i)

$$Y(t)=(Y_1(t),\cdots,Y_n(t))\ \text{相对于}\ Q\ \text{是鞅};\tag{8.6.10}$$

(ii)

$$Y_i(t)Y_j(t)-\delta_{ij}t\text{相对于}Q\text{是一个鞅},\forall\, i,j\in\{1,2,\cdots,n\}.\tag{8.6.11}$$

为证明 (i), 设 $K(t)=M_tY(t)$, 利用 Itô 公式得 (见练习 4.3, 4.4)

$$\begin{aligned}dK_i(t)&=M_tdY_i(t)+Y_i(t)dM_t+dY_i(t)dM_t\\&=M_t(a_i(t)dt+dB_i(t))+Y_i(t)M_t\left(\sum_{k=1}^{n}-a_k(t)dB_k(t)\right)\\&\quad+(dB_i(t))\left(-M_t\sum_{k=1}^{n}a_k(t)dB_k(t)\right)\\&=M_t\left(dB_i(t)-Y_i(t)\sum_{k=1}^{n}a_k(t)dB_k(t)\right)=M_t\gamma^{(i)}(t)dB(t),\end{aligned}\tag{8.6.12}$$

这里 $\gamma^{(i)}(t)=(\gamma_1^{(i)}(t),\cdots,\gamma_n^{(i)}(t))$, 其中

$$\gamma_j^{(i)}(t)=\begin{cases}-Y_i(t)a_j(t), & j\neq i\\ 1-Y_i(t)a_i(t), & j=i,\end{cases}$$

因此 $K_i(t)$ 相对于 P 为鞅, 故由引理 8.6.2, 对 $t>s$,

$$E_Q[Y_i(t)|\mathcal{F}_s]=\frac{E[M_tY_i(t)|\mathcal{F}_s]}{E[M_t|\mathcal{F}_s]}=\frac{E[K_i(t)|\mathcal{F}_s]}{M_s}=\frac{K_i(s)}{M_s}=Y_i(s),$$

由此表明 $Y_i(t)$ 相对于 Q 为鞅, (i) 得证. (ii) 的证明类似, 留给读者自证.

附注　定理 8.6.4 表明, 对任意的 Borel 集 $F_1,F_2,\cdots,F_k\subset\mathbf{R}^n$, 及任意的 $t_1,t_2,\cdots,t_k\leqslant T,k=1,2,\cdots$, 有

$$Q[Y(t_1)\in F_1,\cdots,Y(t_k)\in F_k]=P[B(t_1)\in F_1,\cdots,B(t_k)\in F_k].\tag{8.6.13}$$

(8.6.7) 的一个等价的说法是 $Q\ll P$(Q 关于 P 绝对连续), 其 Radon-Nikodym 导数为

$$\frac{dQ}{dP}=M_T,\quad \text{在}\ \mathcal{F}_T^{(n)}\ \text{上}.\tag{8.6.14}$$

注意 $M_T(\omega)>0$, a.s., 因此也有 $P\ll Q$. 故两个测度 Q 与 P 等价, 由 (8.6.13) 得出

$$\begin{aligned}&P[Y(t_1)\in F_1,\cdots,Y(t_k)\in F_k]>0\\\Leftrightarrow\ &Q[Y(t_1)\in F_1,\cdots,Y(t_k)\in F_k]>0\\\Leftrightarrow\ &P[B(t_1)\in F_1,\cdots,B(t_k)\in F_k];\quad t_1,\cdots,t_k\in[0,T].\end{aligned}\tag{8.6.15}$$

例 8.6.5 假如 $Y(t) \in \mathbf{R}^n$ 满足

$$dY(t) = g(t)dt + dB(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

其中 $g : [0,T] \to \mathbf{R}^n$ 是一个连续的确定性的函数, 因此 Novikov 条件 (8.6.8) 自然满足. $Y(t)$ 相对于 Q 是布朗运动, 这里

$$dQ(\omega) = \exp\left(-\int_0^T g(s)dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^T g^2(s)ds \right) dP(\omega), \quad 在\ \mathcal{F}_T^{(n)}\ 上.$$

定理 8.6.6(Girsanov 定理 II) 设 $Y(t) \in \mathbf{R}^n$ 是如下形式的一个 Itô 过程

$$dY(t) = \beta(t,\omega)dt + \theta(t,\omega)dB(t), \quad t \leqslant T, \tag{8.6.16}$$

这里 $B(t) \in \mathbf{R}^m$, $\beta(t,\omega) \in \mathbf{R}^n$, $\theta(t,\omega) \in \mathbf{R}^{n\times m}$. 假定存在过程 $u(t,\omega) \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^m$, $\alpha(t,\omega) \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^n$ 使得

$$\theta(t,\omega)u(t,\omega) = \beta(t,\omega) - \alpha(t,\omega). \tag{8.6.17}$$

记

$$M_t = \exp\left(-\int_0^t u(s,\omega)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t u^2(s,\omega)ds \right), \quad t \leqslant T \tag{8.6.18}$$

和

$$dQ(\omega) = M_T(\omega)dP(\omega), \quad 在\ \mathcal{F}_T^{(m)}\ 上. \tag{8.6.19}$$

假定 M_t 是一个鞅 (关于 $\mathcal{F}_t^{(n)}$ 和 P). 那么 Q 是 $\mathcal{F}_T^{(m)}$ 上的一个概率测度, 过程

$$\hat{B}(t) := \int_0^t u(s,\omega)ds + B(t), \quad t \leqslant T \tag{8.6.20}$$

相对于 Q 为布朗运动, 依据 $\hat{B}(t)$, 过程 $Y(t)$ 有随机积分表示

$$dY(t) = \alpha(t,\omega)dt + \theta(t,\omega)d\hat{B}(t). \tag{8.6.21}$$

附注 如定理 8.6.4 后的附注一样, 下面的 Novikov 条件是 M_t 为鞅的一个充分条件

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T u^2(s,\omega)ds \right) \right] < \infty. \tag{8.6.22}$$

定理 8.6.6 的证明 由定理 8.6.4 知, Q 是 $\mathcal{F}_T^{(m)}$ 上的一个概率测度, $\hat{B}(t)$ 相对于 Q 为布朗运动. 因此把 (8.6.20) 代入到 (8.6.16), 由 (8.6.17) 得到

$$\begin{aligned} dY(t) &= \beta(t,\omega)dt + \theta(t,\omega)(d\hat{B}(t) - u(t,\omega)dt) \\ &= [\beta(t,\omega) - \theta(t,\omega)u(t,\omega)]dt + \theta(t,\omega)d\hat{B}(t) \\ &= \alpha(t,\omega)dt + \theta(t,\omega)d\hat{B}(t). \end{aligned}$$

注意, 如果 $n=m$, $\theta \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 是可逆的, 则满足 (8.6.17) 的过程由下式唯一决定:

$$u(t,\omega)=\theta^{-1}(t,\omega)[\beta(t,\omega)-\alpha(t,\omega)]. \tag{8.6.23}$$

附注 在很多的应用方面, 如在金融学中 (见第 12 章), 过程 $\alpha(t,\omega)$ 被选择为 0. 那么过程 $Y(t)$ 有如下形式 (见 (8.6.21)):

$$dY(t)=\theta(t,\omega)d\tilde{B}(t),$$

它隐含着 $Y(t)$ 相对于 Q 是一个局部鞅, 此时 Q 称为等价局部鞅测度, 见第 12 章.

例 8.6.7 假定 $Y(t)=\begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ 由下式给出:

$$\begin{aligned} dY_1(t) &= 2dt+dB_1(t)+dB_2(t), \\ dY_2(t) &= 4dt+dB_1(t)-dB_2(t), \end{aligned}$$

即

$$dY(t)=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}dt+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}dB(t), \quad B(t)=\begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix},$$

选择 $\alpha(t,\omega)=0$, 那么方程 (8.6.17) 的形式如下:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

它有唯一解

$$u_1=3, \quad u_2=-1,$$

因此设

$$dQ(\omega)=\exp(-3B_1(T)+B_2(T)-5T)dP(\omega), \quad \text{在 } \mathcal{F}_T^{(2)} \text{ 上},$$

$$d\hat{B}(t)=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}dt+dB(t),$$

Novikov 条件平凡地成立 (见例 8.6.5). 故得出 $\hat{B}(t)$ 相对于概率测度 Q 是一个布朗运动, 且

$$dY(t)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}d\hat{B}(t),$$

此时 $Y(t)$ 相对于 Q 是一个鞅, 即 Q 是 $Y(t)$ 的一个等价鞅测度.

最后给出一个扩散修正.

定理 8.6.8(Girsanov 定理 III) 设 $X(t) = X^x(t) \in \mathbf{R}^n$, $Y(t) = Y^x(t) \in \mathbf{R}^n$ 分别为如下形式的 Itô 扩散和 Itô 过程:

$$dX(t) = b(X(t))dt + \sigma(X(t))dB(t), \quad t \leqslant T, X(0) = x, \tag{8.6.24}$$

$$dY(t) = [\gamma(t,\omega) + b(Y(t))]dt + \sigma(Y(t))dB(t), \quad t \leqslant T, Y(0) = x, \tag{8.6.25}$$

这里函数 $b : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $\sigma : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n\times m}$ 满足定理 5.2.1 的条件, $\gamma(t,\omega) \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^n$, $x \in \mathbf{R}^n$. 假定存在过程 $u(t,\omega) \in \mathcal{W}_{\mathcal{H}}^m$, 使得

$$\sigma(Y(t))u(t,\omega) = \gamma(t,\omega). \tag{8.6.26}$$

定义 M_t, Q 和 $\hat{B}(t)$ 如 (8.6.18)~(8.6.20). 假定 M_t 相对于 $\mathcal{F}_t^{(m)}$ 和 P 是鞅. 则 Q 是 $\mathcal{F}_T^{(m)}$ 上的概率测度, 且

$$dY(t) = b(Y(t))dt + \sigma(Y(t))d\hat{B}(t), \tag{8.6.27}$$

因此

$$Y^x(t) \text{ 的 } Q \text{ 律与 } X^x(t) \text{ 的 } P \text{ 律相同}. \tag{8.6.28}$$

证明 应用定理 8.6.6, 其中令 $\theta(t,\omega) = \sigma(Y(t))$, $\beta(t,\omega) = \gamma(t,\omega) + b(Y(t))$, $\alpha(t,\omega) = b(Y(t))$. 可推出 (8.6.27). 由随机微分方程的解 (引理 5.3.1) 的弱唯一性可得出 (8.6.28).

Girsanov 定理 III 能被用于产生随机微分方程的弱解. 为了说明这点. 设 Y_t 是随机微分方程

$$dY_t = b(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dB(t) \tag{8.6.29}$$

的已知的弱解或强解. 这里 $b : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $\sigma : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n\times m}$, $B(t) \in \mathbf{R}^m$. 我们希望找到一个相关方程

$$dX_t = a(X_t)dt + \sigma(X_t)dB(t) \tag{8.6.30}$$

的弱解 $X(t)$, 这里的漂移系数变为 $a : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. 假如找到一个函数 $u_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 使得

$$\sigma(y)u_0(y) = b(y) - a(y), \quad y \in \mathbf{R}^n$$

(如果 $n = m$, σ 是可逆的, 则可选择 $u_0 = \sigma^{-1}(b - a)$).

如果 $u(t,\omega) = u_0(Y_t(\omega))$ 满足 Novikov 条件. 设 Q 及 $\hat{B}_t = \hat{B}(t)$ 如 (8.6.20) 和 (8.6.21), 则有

$$dY_t = a(Y_t)dt + \sigma(Y_t)d\hat{B}_t, \tag{8.6.31}$$

因此找到一个布朗运动 $(\hat{B}_t, Q)$ 使得 Y_t 满足 (8.6.31). 于是 $(Y_t, \hat{B}_t)$ 是 (8.6.30) 的一个弱解.

例 8.6.9 设 $a:\ \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 是有界可测函数. 那么可构造随机微分方程

$$dX_t = a(X_t)dt + dB_t, \quad X_0 = x \in \mathbf{R}^n \tag{8.6.32}$$

的弱解 $X_t = X_t^x$. 按照上面的步骤来进行: $\sigma = I,\ b = 0$ 及

$$dY_t = dB_t, \quad Y_0 = x,$$

选择

$$u_0 = \sigma^{-1}(b - a) = -a,$$

定义

$$M_t = \exp\left\{-\int_0^t u_0(Y_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t u_0^2(Y_s)ds\right\},$$

即

$$M_t = \exp\left\{\int_0^t a(B_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t a^2(B_s)ds\right\}.$$

固定 $T < \infty$, 设

$$dQ = M_T dP, \quad 在\ \mathcal{F}_T^{(m)}\ 上,$$

那么对 $t \leqslant T$,

$$\hat{B}_t := -\int_0^t a(B_s)ds + B_t$$

相对于 Q 是一个布朗运动. 且

$$dB_t = dY_t = a(Y_t)dt + d\hat{B}_t,$$

于是, 如果设 $Y_0 = x$, 对 $t \leqslant T$, 二元组 $(Y_t, \hat{B}_t)$ 是 (8.6.32) 的一个弱解, 由弱唯一性知, $Y_t = B_t$ 的 Q 律与 X_t^x 的 P 律是一致的. 故此对任意的 $f_1, \cdots, f_k \in C_0(\mathbf{R}^n)$; $t_1, \cdots, t_k \leqslant T$, 有

$$\begin{aligned} E[f_1(X_{t_1}^x)\cdots f_k(X_{t_k}^x)] &= E_Q[f_1(Y_{t_1})\cdots f_k(Y_{t_k})] \\ &= E[M_T f_1(B_{t_1})\cdots f_k(B_{t_k})]. \end{aligned} \tag{8.6.33}$$

练　　习

8.1.* 设 Δ 表示 $\mathbf{R}^n$ 上的 Laplace 算子.

a) (依据布朗运动) 写出下面 Cauchy 问题的一个有界解 g:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g(t,x)}{\partial t} - \dfrac{1}{2}\Delta_x g(t,x) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbf{R}^n, \\ g(0,x) = \phi(x), \end{cases}$$

这里 $\phi \in C_0^2$ 是已知的 (从一般的理论知道它的解是唯一的).

b) 设 $\psi \in C_b(\mathbf{R}^n)$, $\alpha > 0$, 求下面方程的一个有界解 u:

$$\left(\alpha - \frac{1}{2}\Delta\right) u = \psi,$$

且证明解的唯一性.

8.2. 证明初值问题

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\beta^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha x \frac{\partial u}{\partial x}, \quad t > 0,\ x \in \mathbf{R}^n,\\ &u(0,x) = f(x)\ (f \in C_0^2(\mathbf{R})\text{给定})\end{aligned}$$

的解 $u(t,x)$ 有如下的表达式:

$$\begin{aligned}u(t,x) &= E\left[f(x)\cdot \exp\left\{\beta B_t + \left(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2\right)t\right\}\right]\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_R f(x)\cdot \exp\left\{\beta y + \left(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2\right)t\right\}\exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right)dy, \quad t > 0.\end{aligned}$$

8.3. (Kolmogorov 前向方程) 设 X_t 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 Itô 扩散, 其生成元为

$$Af(y) = \sum_{i,j} a_{ij}(y)\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_i b_i(y)\frac{\partial f}{\partial y_i}, \quad f \in C_0^2.$$

假定 X_t 的转移测度有密度函数 $p_t(x,y)$, 即

$$E^x[f(X_t)] = \int_{\mathbf{R}^n} f(y)p_t(x,y)dy, \quad f \in C_0^2, \tag{8.6.34}$$

且对任意给定的 t , x, 函数 $y \to p_t(x,y)$ 是光滑的. 证明 $p_t(x,y)$ 满足 Kolmogorov 前向方程

$$\frac{d}{dt}p_t(x,y) = A_y^* p_t(x,y), \quad \forall\ x,\ y, \tag{8.6.35}$$

这里算子 A_y^* 如下:

$$A_y^*\phi(y) = \sum_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}(a_{ij}\phi) - \sum_i \frac{\partial}{\partial y_i}(b_i\phi), \quad \phi \in C^2 \tag{8.6.36}$$

(即 A_y^* 是 A_y 的伴随算子). 提示: 由 (8.6.34) 和 Dynkin 公式有

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(y)p_t(x,y)dy = f(x) + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} A_y f(y)p_s(x,y)dyds, \quad f \in C_0^2,$$

求关于 t 的微分, 并利用

$$\langle A\phi, \psi\rangle = \langle \phi, A^*\psi\rangle, \quad \phi \in C_0^2,\ \psi \in C^2,$$

这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $L^2(dy)$ 中的内积.

8.4. 设 B_t 是 n 维布朗运动 $(n \leqslant 1)$, F 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 Borel 集, 证明使 B_t 停留在 F 中的时间 t 的期望总长度为零的充要条件是 F 的 Lebesgue 测度为零. 提示: 考虑预解式 R_α, $\alpha > 0$, 然后令 $\alpha \to 0$.

8.5. 证明初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \rho u + \dfrac{1}{2}\Delta u, & t > 0,\ x \in \mathbf{R}^n, \\ u(0,x) = f(x), & f \in C_0^2(\mathbf{R}^n) \text{ 给定}. \end{cases}$$

(这里 $\rho \in \mathbf{R}$ 是常数) 的解 $u(t,x)$ 有表达式

$$u(t,x) = (2\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp(\rho t) \int_{\mathbf{R}^n} f(y) \exp\left(- \frac{(x-y)^2}{2t} \right) dy.$$

8.6. 联系 Black-Scholes 期权定价公式的推导 (见第 12 章), 出现了下面的偏微分方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\rho u + \alpha x \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\beta^2 x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0, x \in \mathbf{R}, \\ u(0,x) = (x-K)^+, \quad x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

这里 $\rho > 0$, α, β 和 K 都为常数,

$$(x-K)^+ = \max(x-K,\ 0).$$

利用 Feynman-Kac 公式证明上述方程的解 u 有如下形式:

$$u(t,x) = \frac{e^{-\rho t}}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbf{R}} \left(x \cdot \exp\left\{ \left(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2 \right) t + \beta y \right\} - K \right)^+ e^{-\frac{y^2}{2t}} dy, \quad t > 0$$

(该表达式可进一步简化, 见练习 12.13).

8.7. 设 X_t 是如下形式的 Itô 积分之和

$$X_t = \sum_{k=1}^{n} \int_0^t v_k(s,\omega) dB_k(s),$$

这里 $(B_1, \cdots, B_n)$ 是 n 维布朗运动. 假定当 $t \to \infty$ 时,

$$\beta_t := \int_0^t \sum_{k=1}^{n} v_k^2(s,\omega) ds \to \infty \text{ a.s.}$$

证明

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{X_t}{\sqrt{2\beta_t \log\log \beta_t}} = 1 \text{ a.s.}$$

提示: 利用重对数律.

8.8. 设 Z_t 是一个 1 维的 Itô 过程, 形式如下:

$$dZ_t = u(t,\omega)dt + dB_t,$$

$\mathcal{G}_t$ 是由 $\{Z_s(\cdot);\ s \leqslant t\}$ 生成的 σ 代数, 定义

$$dN_t = (u(t,\omega) - E[u|\mathcal{G}_t])dt + dB_t.$$

利用推论 8.4.5 证明 N_t 是一个布朗运动 (如果解释 Z_t 为观测过程, 那么 N_t 是更新过程. 见引理 6.2.6).

8.9. 定义 $\alpha(t) = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{2}{3}t^3\right)$. 如果 B_t 是一个布朗运动, 证明存在另一个布朗运动 $\tilde{B}_r$, 使得

$$\int_0^{\alpha_t} e^s dB_s = \int_0^t r d\tilde{B}_r.$$

8.10. 设 B_t 是 $\mathbf{R}$ 中的布朗运动. 证明

$$X_t := B_t^2$$

是下面的随机微分方程

$$dX_t = dt + 2\sqrt{|X_t|}d\tilde{B}_t \tag{8.6.37}$$

的弱解. 提示: 利用 Itô 公式把 X_t 展开为随机积分, 且利用推论 8.4.5 把它与 (8.6.37) 进行比较.

8.11.* a) 设 $Y(t) = t + B(t);\ t \geqslant 0$. 对每个 $T > 0$, 求 $\mathcal{F}_T$ 上的概率测度 Q_T, 使得 $Q_T \sim P$, 且 $\{Y(t)\}_{t\leqslant T}$ 相对于 Q_T 是布朗运动. 利用 (8.6.9) 证明存在 $\mathcal{F}_\infty$ 上的概率测度 Q, 使得

$$Q\,|_{\mathcal{F}_T} = Q_T, \quad \forall\, T > 0.$$

b) 证明

$$P(\lim_{t\to\infty} Y(t) = \infty) = 1,$$

然而

$$Q(\lim_{t\to\infty} Y(t) = \infty) = 0.$$

为什么这个与 Girsanov 定理并不矛盾?

8.12.* 设

$$dY(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_1(t) \\ dB_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \leqslant T.$$

求 $\mathcal{F}_T^{(2)}$ 上的概率测度 Q, 使得 $Q \sim P$ 且

$$dY(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\tilde{B}_1(t) \\ \tilde{B}_2(t) \end{pmatrix},$$

这里

$$\tilde{B}(t) := \begin{pmatrix} -3t \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix}$$

相对于 Q 是布朗运动.

8.13. 设 $b:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是一个 Lipschitz 连续的函数. 定义 $X_t=X_t^x\in\mathbf{R}$ 如下:

$$dX_t=b(X_t)dt+dB_t,\quad X_0=x\in\mathbf{R}.$$

a) 利用 Girsanov 定理证明对任意的 $M<\infty$, $x\in\mathbf{R}$ 及 $t>0$, 有

$$P[X_t^x\geqslant M]>0.$$

b) 选择 $b(x)=-r$, 这里 $r>0$ 为常数. 证明对任意的 x, 当 $t\to\infty$ 时, 有

$$X_t^x\to-\infty \text{ a.s.}$$

把它与 a) 中的结果进行比较.

8.14. (关于布朗运动的图像的极集) 设 B_t 是 1 维布朗运动, 初值 $x\in\mathbf{R}$.

a) 证明对每个固定的 $t_0>0$, 有

$$P^x[B_{t_0}=0]=0.$$

b) 证明对每个 (非平凡的) 闭区间 $J\subset\mathbf{R}^+$ 有

$$P^x[\exists t\in J,\ B_t=0]>0.$$

提示: 如果 $J=[t_1,\ t_2]$, 考虑 $P^x[B_{t_1}<0,\ 且B_{t_2}>0]$, 然后利用中值定理.

c) 由 a) 和 b), 自然会问什么样的闭集 $F\subset\mathbf{R}^+$ 有性质

$$P^x[\exists t\in F,\ B_t=0]=0. \tag{8.6.38}$$

为了更好地研究这个问题, 引进布朗运动的图像 X_t, 其中

$$dX_t=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}dt+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}dB_t,\quad X_0=\begin{pmatrix}t_0\\x_0\end{pmatrix},$$

即

$$X_t=X_t^{t_0,x_0}=\begin{pmatrix}t_0+t\\B_t^{x_0}\end{pmatrix},\quad 这里\ B_0^{x_0}=x_0 \text{ a.s.}$$

那么 F 满足 (8.6.38) 的充要条件是: $K:=F\times\{0\}$ 是 X_t 的极集, 即意味着

$$P^{t_0,x_0}[\exists t>0,X_t\in K]=0,\quad \forall t_0,x_0. \tag{8.6.39}$$

对一个扩散, 求极集的关键是考虑它的 Green 算子 R, 简单地说, 即预解式 R_α, 其中 $\alpha=0$,

$$Rf(t_0,x_0)=E^{t_0,x_0}\left[\int_{t_0}^{\infty}f(X_s)ds\right],\quad f\in C_0(\mathbf{R}^n).$$

证明

$$Rf(t_0,x_0)=\int_{\mathbf{R}^2}G(t_0,x_0,t,x)f(t,x)dtdx,$$

这里

$$G(t_0,x_0,t,x)=\mathcal{X}_{t>t_0}\cdot(2\pi(t-t_0))^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{|x-x_0|^2}{2(t-t_0)}\right), \tag{8.6.40}$$

G 是 X_t 的 Green 函数.

d) K 的容度, $C(K)=C_G(K)$, 定义为

$$C(K)=\sup\{\mu(K):\ \mu\in M_G(K)\},$$

这里

$$M_G(K)=\left\{\mu,\mu\text{为}K\text{上的测度使得对}\forall\ t_0,\ x_0,\right.$$
$$\left.\int_K G(t_0,x_0,t,x)d\mu(t,x)\leqslant 1\right\}.$$

从随机势理论的一般性结果表明 (Blumenthal, Getoor, 1968, 推论 VI.4.3).

$$P^{t_0,x_0}[X_t\ \text{碰到}\ K]=0\Leftrightarrow C(K)=0. \tag{8.6.41}$$

利用这个证明

$$\Lambda_{\frac{1}{2}}(F)=0\Rightarrow P^{x_0}[\exists\ t\in F,\ B_t=0]=0,$$

这里 $\Lambda_{\frac{1}{2}}$ 表示 $\frac{1}{2}$ 维 Hausdorff 测度 (Folland, 1984, 10.2).

8.15. 设 $f\in C_0^2(\mathbf{R}^n)$, $\alpha(x)=(\alpha_1(x),\cdots,\alpha_n(x))$, 其中 $\alpha_i\in C_0^2(\mathbf{R}^n)$ 是给定的函数. 考虑偏微分方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\displaystyle\sum_{i=1}^n\alpha_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, & t>0,\ x\in\mathbf{R}^n,\\ u(0,x)=f(x), & x\in\mathbf{R}^n.\end{cases}$$

a) 利用 Girsanov 定理证明该方程的唯一有界解 $u(t,x)$ 可表示成

$$u(t,x)=E^x\left[\exp\left(\int_0^t\alpha(B_s)dB_s-\frac{1}{2}\int_0^t\alpha^2(B_s)ds\right)f(B_t)\right],$$

这里 E^x 是相对于 P^x 的期望.

b) 假定 α 是一个梯度, 即存在 $\gamma\in C^1(\mathbf{R}^n)$, 使得

$$\nabla\gamma=\alpha.$$

为简单起见, 假定 $\gamma\in C_0^2(\mathbf{R}^n)$ 利用 Itô 公式证明 (见练习 4.8)

$$u(t,x)=\exp(-\gamma(x))E^x\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t(\nabla\gamma^2(B_s)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\Delta\gamma(B_s))ds\right\}\exp(\gamma(B_t))f(B_t)\right].$$

c) 设 $v(t,x)=\exp(\gamma(x))u(t,x)$, 利用 Feynman-Kac 公式证明 $v(t,x)$ 满足偏微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{1}{2}(\nabla\gamma^2+\Delta\gamma)\cdot v+\dfrac{1}{2}\Delta v, \quad t>0,\ x\in\mathbf{R}^n, \\ v(0,x)=\exp(\gamma(x))f(x), \quad x\in\mathbf{R}^n. \end{cases}$$

也可见练习 8.16.

8.16. (带漂移的布朗运动与消灭的布朗运动的关系) 设 B_t 表示 $\mathbf{R}^n$ 中的布朗运动, 考虑 $\mathbf{R}^n$ 中的扩散 X_t 定义为

$$dX_t=\nabla h(X_t)dt+dB_t, \quad X_0=x\in\mathbf{R}^n, \tag{8.6.42}$$

这里 $h\in C_0^1(\mathbf{R}^n)$

a) 通过以确定的速度 v 消灭 B_t 所得的过程 Y_t 与过程 X_t 之间有重要的联系. 更准确地说, 首先证明对 $f\in C_0(\mathbf{R}^n)$ 有

$$E^x[f(X_t)]=E^x\left[\exp\left(-\int_0^t v(B_s)ds\right)\cdot\exp(h(B_t)-h(x))\cdot f(B_t)\right], \tag{8.6.43}$$

这里

$$v(x)=\frac{1}{2}|\nabla h(x)|^2+\frac{1}{2}\Delta h(x) \tag{8.6.44}$$

(利用 Girsanov 定理, 用 B_t 去表示 (8.6.43) 的左边, 然后利用 Itô 公式于 $Z_t=h(B_t)$ 得到 (8.6.44)).

b) 利用 Feynman-Kac 公式重新表达 (8.6.43) 如下 (假定 $v\geqslant 0$):

$$T_t^X(f,x)=\exp(-h(x))\cdot T_t^Y(f\cdot\exp h,x),$$

这里 T_t^X, T_t^Y 分别表示过程 X 与 Y 的推移算子, 即

$$T_t^X(f,x)=E^x[f(X_t)], \quad \text{对于 } Y \text{ 也类似}.$$

8.17. 给定 $Y(t)=\begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{pmatrix}\in\mathbf{R}^2$ 如下:

$$dY_1(t)=\beta_1(t)dt+dB_1(t)+2dB_2(t)+3dB_3(t),$$
$$dY_2(t)=\beta_2(t)dt+dB_1(t)+2dB_2(t)+2dB_3(t),$$

这里 β_1, β_2 是有界的适应过程. 证明对 Y_t 存在无穷多个等价鞅测度 Q (见例 8.6.7).

8.18. (随机控制中的 Girsanov 定理) 经过与 Jerome Stein 的有用的交流, 下面的练习是令人鼓舞的. 主要基于文献 (Fleming, 1999, 第 2 章, 第 2.5 节) 给出的例子. 也可见文献 (Platen, Rebolledo, 1996).

假定有一个金融市场, 它有两种投资可能性:

(i) 一个无风险资产, 在 t 时刻的单位价格 $S_0(t)$ 满足

$$dS_0(t)=\rho(t)S_0(t)dt, \quad S_0(0)=1.$$

(ii) 一个风险资产, 在 t 时刻的单位价格 $S_1(t)$ 满足

$$dS_1(t) = S_1(t)[\mu(t)dt + \sigma(t)dB(t)], \quad S_1(0) > 0.$$

假定系数 $\rho(t), \mu(t)$ 和 $\sigma(t) \neq 0$ 都是确定性的, 且满足

$$\int_0^T \{|\rho(t)| + |\mu(t)| + \sigma^2(t)\}dt < \infty.$$

该市场中的一个证券组合可用一个 $\mathcal{F}_t$ 适应过程 $\pi(t)$ 表示, $\pi(t)$ 是在 t 时刻总财富 $X(t)$ 投资于风险资产的比例. 如果假定 $\pi(t)$ 是自筹资的 (见第 12 章), 则相应的财富过程 $X(t) = X_\pi(t)$ 将满足动力系统

$$\begin{aligned}&dX(t) = (1-\pi(t))X(t)\rho(t)dt + \pi(t)X(t)[\mu(t)dt + \sigma(t)dB(t)],\\&X(0) = x > 0 \ \ (\text{常数}).\end{aligned}$$

问题是求证券组合 π^* 最大化终端财富的期望效用

$$E[U(X_\pi(T))].$$

此时, 当 U 是幂函数时, 即

$$U(x) = x^\gamma, \ \gamma \in (0,1)\text{为常数}$$

(这种类型的最优证券组合问题的更进一步的讨论见第 11 章和第 12 章).

a) 证明

$$\begin{aligned}E[X_\pi^\gamma(T)] = KE\bigg[Z_\pi \exp\bigg(\gamma\int_0^T &\{(\mu(t)-\rho(t))\pi(t)\\&-\frac{1}{2}(1-\gamma)\sigma^2(t)\pi^2(t)\}dt\bigg)\bigg],\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}&Z_\pi = Z_\pi(\omega) = \exp\left(\int_0^T \gamma\sigma(t)\pi(t)dB(t) - \frac{1}{2}\gamma^2\int_0^T \sigma^2(t)\pi^2(t)dt\right),\\&K = x^\gamma \exp\left(\gamma\int_0^T \rho(t)dt\right) \ (\text{与}\pi\text{无关}).\end{aligned}$$

在 $\mathcal{F}_T$ 上定义一个新的测度 Q_π:

$$dQ_\pi(\omega) = Z_\pi(\omega)dP(\omega),$$

那么有

$$E[X_\pi^\gamma(T)] = KE_{Q_\pi}[F(\pi)],$$

这里

$$F(\pi)=\exp\left(\gamma\int_0^T\{(\mu(t)-\rho(t))\pi(t)-\frac{1}{2}(1-\gamma)\sigma^2(t)\pi^2(t)\}dt\right).$$

b) 通过对每个 ω 选择合适的 π^*, 最大化 $F(\pi)$ 的指数中的被积函数, 由此得到

$$\pi(t)=\pi^*(t):=\frac{\mu(t)-\rho(t)}{(1-\gamma)\sigma^2(t)}.$$

证明

$$F(\pi)\leqslant F(\pi^*)=\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T\frac{(\mu(t)-\rho(t))^2}{(1-\gamma)\sigma^2(t)}dt\right).$$

c) 现在假定考虑的证券组合 π 满足 Novikov 条件

$$E\left[\exp\left(\frac{\gamma^2}{2}\int_0^T\sigma^2(t)\pi^2(t)dt\right)\right]<\infty,$$

利用它得到

$$\sup_{\pi}E[X_\pi^\gamma(T)]=K\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T\frac{(\mu(t)-\rho(t))^2}{(1-\gamma)\sigma^2(t)}dt\right),$$

如果上式是有限的, 则最优证券组合是 b) 中给出的 $\pi^*(t)$.

第 9 章　在边界值问题中的应用

9.1　组合 Dirichlet-Poisson 问题, 唯一性

现在利用前几章的结果解决在导言中提及的一般化的 Dirichlet 问题. 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中的区域 (连通的开集), L 表示在 $C^2(\mathbf{R}^n)$ 中的半椭圆型偏微分算子, 形式如下:

$$L = \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{9.1.1}$$

这里 $b_i(x)$ 和 $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ 是连续函数 (见下面) (L 称为半椭圆的 (椭圆的) 意味着对 $\forall\, x$, 对称矩阵 $a(x) = [a_{ij}(x)]_{i,j=1}^n$ 所有的特征值都是非负的 (正的)).

组合 Dirichlet-Poisson 问题

设 $\phi \in C(\partial D)$, $g \in C(D)$ 是给定的函数, 求 $w \in C^2(D)$ 使得

(i)

$$Lw = -g, \quad \text{在 } D \text{ 内}; \tag{9.1.2}$$

(ii)

$$\lim_{x \to y,\ x \in D} w(x) = \phi(y), \quad \forall\, y \in \partial D. \tag{9.1.3}$$

求解的思想如下: 先找一个 Itô 扩散 $\{X_t\}$, 它的生成元与 L 在 $C_0^2(\mathbf{R}^n)$ 上是一致的. 为了得到它, 简单地选择矩阵 $2a(x)$ 的平方根 $\sigma(x) \in \mathbf{R}^{n\times n}$, 即

$$\frac{1}{2}\sigma(x)\sigma^T(x) = [a_{ij}(x)]. \tag{9.1.4}$$

假定 $\sigma(x)$ 和 $b(x) = [b_i(x)]$ 满足定理 (5.2.1) 的条件 (5.2.1) 和 (5.2.2) (比如, 如果每个 $a_{ij} \in C^2(D)$) 是有界的, 其一阶与二阶偏导数也是有界的, 那么它的平方根 σ 可求出 (Fleming, Rishel, 1975). 然后, 设 X_t 是如下方程:

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t \tag{9.1.5}$$

的解, 这里 B_t 是 n 维布朗运动. 像通常一样, 设 E^x 表示相对于初始值为 $x \in \mathbf{R}^n$ 的 X_t 的概率律 Q^x 的期望. 那么 (9.1.2) 与 (9.1.3) 的一个解为

$$w(x) = E^x[\phi(X_{\tau_D}) \cdot \mathcal{X}_{\{\tau_D < \infty\}}] + E^x\left[\int_0^{\tau_D} g(X_t)dt\right], \tag{9.1.6}$$

ϕ 是有界的, 且

$$E^x\left[\int_0^{\tau_D}|g(X_t)|dt\right]<\infty,\quad \forall\ x. \tag{9.1.7}$$

Dirichlet-Poisson 问题由两部分组成:

(i) 解的存在性.

(ii) 解的唯一性.

唯一性问题相对较为简单, 因此先处理它. 在本节, 证明两个容易和有用的唯一性结果, 然后在下节讨论解的存在性和其他的唯一性问题.

定理 9.1.1 (唯一性定理 (1)) 假定 ϕ 是有界的, g 满足 (9.1.7) 式. $w\in C^2(D)$ 是有界的, 且满足

(i)

$$Lw=-g,\quad 在\ D\ 内; \tag{9.1.8}$$

(ii)$'$

$$\lim_{t\uparrow\tau_D}w(X_t)=\phi(X_{\tau_D})\cdot\mathcal{X}_{\{\tau_D<\infty\}},\ \text{a.s.}\quad Q^x,\forall x, \tag{9.1.9}$$

那么

$$w(x)=E^x[\phi(X_{\tau_D})\cdot\mathcal{X}_{\{\tau_D<\infty\}}]+E^x\left[\int_0^{\tau_D}g(X_t)dt\right]. \tag{9.1.10}$$

证明 设 $\{D_k\}_{k=1}^\infty$ 是一个单调增的开集列, 使得: $D_k\subset\subset D$, 且 $D=\cup_{k=1}^\infty D_k$. 定义

$$\alpha_k=k\wedge\tau_{D_k},\quad k=1,2,\cdots,$$

那么由 Dynkin 公式和 (9.1.8) 有

$$w(x)=E^x[w(X_{\alpha_k})]-E^x\left[\int_0^{\alpha_k}Lw(X_t)dt\right]=E^x[w(X_{\alpha_k})]+E^x\left[\int_0^{\alpha_k}g(X_t)dt\right]. \tag{9.1.11}$$

由 (9.1.9), 有 $w(X_{\alpha_k})\to\phi(X_{\tau_D})\cdot\mathcal{X}_{\{\tau_D<\infty\}}$, a.s. Q^x 且逐点有界, 因此 $k\to\infty$ 时, 有

$$E^x[w(X_{\alpha_k})]\to E^x[\phi(X_{\tau_D})\cdot\mathcal{X}_{\{\tau_D<\infty\}}], \tag{9.1.12}$$

而且 $k\to\infty$ 时,

$$E^x\left[\int_0^{\alpha_k}g(X_t)dt\right]\to E^x\left[\int_0^{\tau_D}g(X_t)dt\right], \tag{9.1.13}$$

这是因为

$$\int_0^{\alpha_k}g(X_t)dt\to\int_0^{\tau_D}g(X_t)dt\ \ \text{a.s.}$$

且

$$\left|\int_0^{\alpha_k}g(X_t)dt\right|\leqslant\int_0^{\tau_D}|g(X_t)|dt.$$

而由 (9.1.7) 知它是 Q^x 可积的, 由控制收敛定理知 (9.1.13) 成立. 结合 (9.1.12) 及 (9.1.11) 可得到 (9.1.10).

由此可直接得到下面的推论:

推论 9.1.2 (唯一性定理 (2)) 假定 ϕ 是有界的, g 满足 (9.1.7), 且

$$\tau_D < \infty \text{ a.s. } Q^x, \quad \forall\, x, \tag{9.1.14}$$

如果 $w \in C^2(D)$ 是组合 Dirichlet-Poisson 问题 (9.1.2), (9.1.3) 的有界解. 则有

$$w(x) = E^x[\phi(X_{\tau_D})] + E^x\left[\int_0^{\tau_D} g(X_t)dt\right]. \tag{9.1.15}$$

例 9.1.3 (经典 Dirichlet 问题) 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界开集, ϕ 是 ∂D 上的有界函数, 假定存在函数 $w \in C^2(D)$ 使得

(i)

$$\Delta w = 0, \quad \text{在 } D \text{ 内}; \tag{9.1.16}$$

(ii)

$$\lim_{x\to y, x\in D} w(x) = \phi(y), \quad \forall\, y \in \partial D, \tag{9.1.17}$$

那么

$$w(x) = E^x[\phi(B_{\tau_D})],$$

这是因为

$$\frac{1}{2}\Delta = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \text{是 } B(t) \text{ 的生成元},$$

且从例 7.4.2 知 $\tau_D < \infty$, a.s., 故由推论 (9.1.2) 马上可得到上面的结论.

例 9.1.4 (经典热传导方程) 考虑热算子

$$L = \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (s, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R},$$

它是

$$X_t = X_t^{s,x} = (s + t, B_t^x), \quad t \geqslant 0$$

的生成元. 这里 B_t^x 是初值为 $x \in \mathbf{R}$ 的布朗运动 (见例 7.3.5). 因此, 如果热传导方程

(i)

$$\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (s, x) \in (0, T) \times \mathbf{R} =: D; \tag{9.1.18}$$

(ii)

$$\lim_{t\to\tau_D} w(X_t) = \phi(X_{\tau_D}) \text{ a.s.} \tag{9.1.19}$$

存在解 $w(s,x) \in C^2(\mathbf{R}^2)$, 这里 $\phi : \{T\} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是给定的有界函数. 则有

$$w(s,x) = E^{s,x}[\phi(X_{\tau_D})] = E^{s,x}[\phi(s+\tau_D, B^x_{\tau_D})],$$

这里

$$\begin{aligned}\tau_D &= \inf\{t>0;\ (s+t, B^x(t)) \notin [0,T]\times\mathbf{R}\} \\ &= \inf\{t>0;\ s+t \notin [0,T]\} = T-s,\end{aligned} \tag{9.1.20}$$

因此热传导方程的解是

$$w(s,x) = E^{s,x}[\phi(T, B^x_{T-s})]. \tag{9.1.21}$$

9.2 Dirichlet 问题, 正则点

现在考虑解的存在性问题. 把组合 Dirichlet-Poisson 问题分解成两部分: Dirichlet 问题和 Poisson 问题是较为便利的.

Dirichlet 问题 设 $\phi \in C(\partial D)$ 是给定的函数. 求 $u \in C^2(D)$ 使得

(i)

$$Lu = 0, \quad 在\ D\ 内; \tag{9.2.1}$$

(ii)

$$\lim_{x\to y, x\in D} u(x) = \phi(y), \quad \forall\ y \in \partial D. \tag{9.2.2}$$

Poisson 问题 设 $g \in C(D)$ 是给定的函数. 求 $v \in C^2(D)$ 使得

(a)

$$Lv = -g, \quad 在\ D\ 内; \tag{9.2.3}$$

(b)

$$\lim_{x\to y, x\in D} v(x) = 0, \quad \forall\ y \in \partial D. \tag{9.2.4}$$

注意, 如果 u 与 v 分别是 Dirichlet 问题和 Poisson 问题的解. 那么 $w := u + v$ 是组合 Dirichlet-Poisson 问题的解.

先考虑 Dirichlet 问题, 然后在下节研究 Poisson 问题.

为简单起见, 在本节假定 (9.1.14) 成立.

用推论 9.1.2 的观点来看, Dirichlet 问题 (9.1.2), (9.1.3) 的解的存在性问题可重述如下

$$u(x) := E^x[\phi(X_{\tau_D})] \tag{9.2.5}$$

什么时候是解?

不幸地, 函数 $u(x)$ 一般不一定在 $C^2(D)$ 中, 事实上它甚至不一定是连续的, 而且它也不一定满足 (9.2.2). 考虑下面的例子.

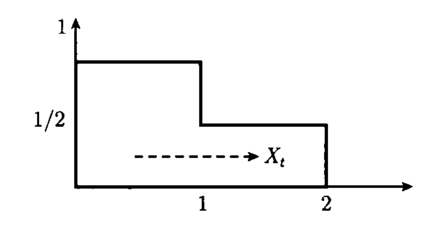
例 9.2.1 设 $X(t)=(X_1(t),X_2(t))$ 是下面问题

$$dX_1(t)=dt,$$
$$dX_2(t)=0$$

的解. 因此, $X(t)=X(0)+t(1,0)\in\mathbf{R}^2$; $t\geqslant 0$. 设

$$D=((0,1)\times(0,1))\cup\left((0,2)\times\left(0,\frac{1}{2}\right)\right).$$

ϕ 是 ∂D 上的连续函数, 使得



$$\phi=1,\quad 在\ \{1\}\times\left[\frac{1}{2},1\right]\ 上;$$
$$\phi=0,\quad 在\ \{2\}\times\left[0,\frac{1}{2}\right]\ 上;$$
$$\phi=0,\quad 在\ \{0\}\times[0,1]\ 上.$$

那么

$$u(t,x)=E^{t,x}[\phi(X_{\tau_D})]=\begin{cases}1, & x\in\left(\frac{1}{2},1\right);\\ 0, & x\in\left(0,\frac{1}{2}\right).\end{cases}$$

因此 u 甚至不是连续的, 而且

$$\lim_{t\to 0^+}u(t,x)=1\neq\phi(0,x),\quad 如果\ \frac{1}{2}<x<1,$$

因此 (9.2.2) 不成立.

然而, 由 (9.2.5) 定义的函数 $u(x)$ 将是更弱的随机意义下 Dirichlet 问题的解, 即边界值条件 (9.2.2) 由随机边界条件 (9.1.9) 替代. 而条件 (9.2.1) 被相应的条件 $\mathcal{A}u=0$ 所替代. 这里 $\mathcal{A}$ 是 X_t 的特征算子 (见 7.5 节).

下面更详细地进行解释:

定义 9.2.2 设 f 在 D 上是一个局部有界且可测的函数. 如果满足: 对 $\forall\, x\in D$ 和任意的有界开集 U, $\bar{U}\subset D$ 有

$$f(x)=E^x[f(X_{\tau_u})],$$

则称 f 在 D 内为 X 调和的.

引理 9.2.3 a) 设 f 在 D 内是 X 调和的, 那么在 D 内, $\mathcal{A}f=0$.

b) 相反地, 如果 $f \in C^2(D)$, 且在 D 内 $\mathcal{A}f = 0$, 那么 f 是 X 调和的.

证明　a) 直接由 $\mathcal{A}$ 的定义导出.

b) 在 D 内任选有界开集 U, 使 $\bar{U} \subset D$, 由 Dynkin 公式, 及在 U 内有 $Lf = \mathcal{A}f = 0$ 可得

$$\begin{aligned} E^x[f(X_{\tau_U})] &= \lim_{k\to\infty} E^x[f(X_{\tau_U \wedge k})] \\ &= f(x) + \lim_{k\to\infty} E^x\left[\int_0^{\tau_U\wedge k} (Lf)(X_s)ds\right] = f(x). \end{aligned}$$

关于 X 调和函数的最重要的例子见如下的结果:

引理 9.2.4　设 ϕ 是 ∂D 上的有界可测函数, 记

$$u(x) = E^x[\phi(X_{\tau_D})], \quad x \in D,$$

那么 u 是 X 调和的. 特别, $\mathcal{A}u = 0$.

证明　对任意有界的开集 $V \subset D$, $\bar{V} \subset D$. 由平均值性质 (7.2.9) 有

$$u(x) = \int_{\partial V} u(y) Q^x[X_{\tau_V} \in dy] = E^x[u(X_{\tau_V})].$$

下面对随机 Dirichlet 问题求解.

随机 Dirichlet 问题　给定 ∂D 上的有界可测函数 ϕ, 求定义于 D 上的函数 u 使得

$(\text{i})_s$

$$u \text{ 是 } X \text{ 调和的;} \tag{9.2.6}$$

$(\text{ii})_s$

$$\lim_{t\uparrow\tau_D} u(X_t) = \phi(X_{\tau_D}) \text{ a.s. } Q^x, \ x \in D. \tag{9.2.7}$$

首先求解随机 Dirichlet 问题 (9.2.6), (9.2.7). 然后再找出与原问题 (9.2.1), (9.2.2) 的关系.

定理 9.2.5 (随机 Dirichlet 问题的解)　设 ϕ 是 ∂D 上的有界可测函数.

a) (存在性) 定义

$$u(x) = E^x[\phi(X_{\tau_D})], \tag{9.2.8}$$

则 u 是随机 Dirichlet 问题 (9.2.6), (9.2.7) 的解.

b) (唯一性) 假设 g 是 D 上的有界函数使得

(1) g 是 X 调和的.

(2) $\lim_{t\uparrow\tau_D} g(X_t) = \phi(X_{\tau_D})$ a.s. Q^x, $x \in D$.

那么 $g(x) = E^x[\phi(X_{\tau_D})]$, $x \in D$.

证明 a) 由引理 9.2.4 知 $(\mathrm{i})_s$ 成立. 固定 $x \in D$, 设 $\{D_k\}$ 是递增的开集序列, 使得 $D_k \subset\subset D$, 且 $D = \cup_k D_k$. 记 $\tau_k = \tau_{D_k}$, $\tau = \tau_D$. 则由强 Markov 性有

$$u(X_{\tau_k}) = E^{X_{\tau_k}}[\phi(X_\tau)] = E^x[\theta_{\tau_k}(\phi(X_\tau))|\mathcal{F}_{\tau_k}] = E^x[\phi(X_\tau)|\mathcal{F}_{\tau_k}]. \qquad (9.2.9)$$

现在 $M_k = E^x[\phi(X_\tau)|\mathcal{F}_{\tau_k}]$ 是一个有界 (离散时间) 鞅. 因此由鞅收敛定理推论 C.9(附录 C) 得到

$$\lim_{k\to\infty} u(X_{\tau_k}) = \lim_{k\to\infty} E^x[\phi(X_\tau)|\mathcal{F}_{\tau_k}] = \phi(X_\tau), \qquad (9.2.10)$$

上述极限对几乎所有的 ω 成立, 同时在 $L^p(Q^x)$, $\forall\, p < \infty$ 收敛意义下成立. 而且由 (9.2.9), 对每个 k, 过程

$$N_t = u(X_{\tau_k \vee (t\wedge\tau_{k+1})}) - u(X_{\tau_k}), \quad t \geqslant 0$$

相对于 $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{\tau_k\vee(t\wedge\tau_{k+1})}$ 是鞅.

因此由鞅不等式, 有

$$Q^x\left[\sup_{\tau_k\leqslant r\leqslant\tau_{k+1}} |u(X_r) - u(X_{\tau_k})| > \varepsilon\right] \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} E^x[|u(X_{\tau_{k+1}}) - u(X_{\tau_k})|^2] \to 0,$$

$$\text{当 } k \to \infty,\ \forall\, \varepsilon > 0. \qquad (9.2.11)$$

从 (9.2.10) 和 (9.2.11) 推得 $(\mathrm{ii})_s$ 成立.

b) 设 D_k, τ_k 如 a). 由于 g 是 X 调和的, 有

$$g(x) = E^x[g(X_{\tau_k})],$$

对任意的 k 成立. 因此由 (2) 和有界收敛定理得

$$g(x) = \lim_{k\to\infty} E^x[g(X_{\tau_k})] = E^x[\phi(X_{\tau_D})],$$

如所要证.

最后, 回到原 Dirichlet 问题 (9.2.1), (9.2.2), 已经看到解不一定存在. 然而, 如果把要求 (9.2.2) 降低到仅在 D 的边界的某个子集上成立, 则对一大类过程 X_t, 可得到解 (对任意的 D). 而边界上该子集的点称为正则点. 在定义正则点和更准确叙述结论之前, 需要引入下面的引理 (如同前面一样, 设 $\mathcal{M}_t$ 和 $\mathcal{M}_\infty$ 分别表示由 X_s; $s \leqslant t$, 及 X_s; $s \geqslant 0$ 生成的 σ 代数).

引理 9.2.6 (0-1 律) 设 $H \in \cap_{t>0}\mathcal{M}_t$, 那么有 $Q^x(H) = 0$ 或 $Q^x(H) = 1$.

证明 由 Markov 性, 对任意有界的 $\mathcal{M}_\infty$ 可测的函数 η: $\Omega \to \mathbf{R}$, 有

$$E^x[\theta_t\eta|\mathcal{M}_t] = E^{X_t}[\eta],$$

这隐含着对任意的 t 有

$$\int_H \theta_t\eta \cdot dQ^x = \int_H E^{X_t}[\eta] dQ^x.$$

先假定 $\eta = \eta_k = g_1(X_{t_1})\cdots g_k(X_{t_k})$, 其中每个 g_i 都是有界连续函数. 然后令 $t \to 0$, 由 Feller 连续性 (引理 8.1.4) 和有界收敛定理得

$$\int_H \eta dQ^x = \lim_{t\to 0}\int_H \theta_t\eta dQ^x = \lim_{t\to 0}\int_H E^{X_t}[\eta]dQ^x = Q^x(H)E^x[\eta].$$

对一般的有界 $\mathcal{M}_\infty$ 可测的函数 η, 可用如上的函数 η_k 逼近. 由此有

$$\int_H \eta dQ^x = Q^x(H)E^x[\eta],$$

对一般的有界 $\mathcal{M}_\infty$ 可测的函数也成立. 如果设 $\eta = \mathcal{X}_H$, 可得

$$Q^x(H) = (Q^x(H))^2.$$

由此可推出结论.

推论 9.2.7　设 $y \in \mathbf{R}^n$, 那么有

$$Q^y[\tau_D = 0] = 0, \quad \text{或 } Q^y[\tau_D = 0] = 1.$$

证明　$H = \{\omega:\ \tau_D = 0\} \in \cap_{t>0}\mathcal{M}_t$.

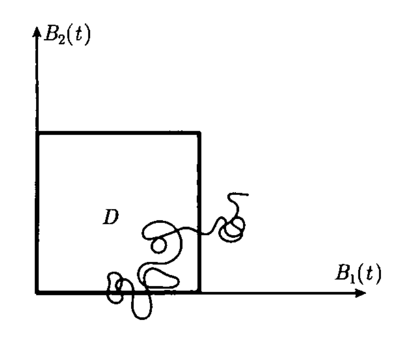
换句话说, 初始点为 y, X_t 的几乎所有轨道在 D 内停留时间为正, 或者几乎所有轨道都马上离开 D, 二者必居其一. 在后一种情形, 称 y 为正则点, 即

定义 9.2.8　点 $y \in \partial D$ 如果满足条件:

$$Q^y[\tau_D = 0] = 1,$$

则称 y 为正则点 (相对于 X_t). 否则称 y 为非正则点.

例 9.2.9　推论 9.2.7 初看起来似乎很难令人相信. 比如, 如果 X_t 是一个 2 维布朗运动 B_t, $\bar{D}$ 是正方形 $[0,1]\times[0,1]$, 初始点为 $\left(\frac{1}{2},0\right)$. 人们可能认为在一个正的时间区间内有一半的轨道会留在上半平面内, 而有一半的轨道会在下半平面内. 然而推论 9.2.7 表明并非如此. 它们要么全部停留在 D 内, 要么全部马上离开 D. 考虑到对称性, 似乎第一种情况是不可能的. 因此 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 和 ∂D 的其他点类似地都相对于 X_t 为 D 的正则点.



例 9.2.10 设 $D=[0,1]\times[0,1]$. L 是抛物型微分算子 (见例 7.3.5),

$$Lf(t,x)=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad (t,x)\in\mathbf{R}^2,$$

这里

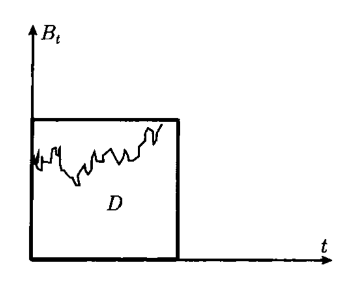
$$b=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad a=[a_{ij}]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$

因此, 如果选择 $\sigma=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, 则有 $\frac{1}{2}\sigma\sigma^T=a$. 这样给出 Itô 扩散 X_t 的随机微分方程

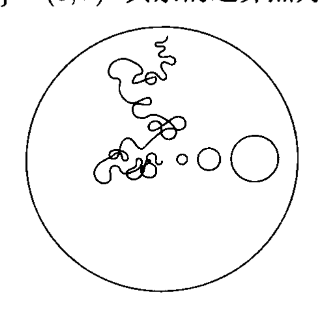
$$dX_t=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}dt+\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dB_t^{(1)}\\dB_t^{(2)}\end{pmatrix},$$

其生成元为 L. 换句话说, 有

$$X_t=\begin{pmatrix}t+t_0\\B_t\end{pmatrix},\quad X_0=\begin{pmatrix}t_0\\x\end{pmatrix},$$



这里 B_t 为 1 维布朗运动, 由例 7.3.5 可知 X_t 是布朗运动的图像. 此时不难看出, ∂D 的非正则点构成的集合为开线段 $\{0\}\times(0,1)$. 其余的边界点为正则点.



例 9.2.11 设 $\Delta=\{(x,y);\ x^2+y^2<1\}\subset\mathbf{R}^2$, $\{\Delta_n\}$ 是 Δ 中相应以 $(2^{-n},0)$ 为中心的互不连通的开圆序列, $n=1,2,\cdots$. 记

$$D=\Delta\setminus\overline{(\cup_{n=1}^{\infty}\Delta_n)}.$$

利用如例 9.2.9 相似的讨论易知, $\partial\Delta\cup\cup_{n=1}^{\infty}\partial\Delta_n$ 中的所有点都是 D 相对于 2 维布朗运动 B_t 的正则点. 但是 0 点是什么情况呢? 答案依赖于圆 Δ_n 的大小. 更准确地说, 如果 r_n 是 Δ_n 的半径, 那么 0 是 D 的正则点的充要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\log\frac{1}{r_n}}=\infty,\tag{9.2.12}$$

这是著名的 Wiener 准则的一个结果 (Port, Stone, 1979, 第 225 页).

定义了正则点之后, 现在来讨论广义的 Dirichlet 问题:

广义的 Dirichlet 问题　给定区域 $D \subset \mathbf{R}$, L 和 ϕ 如前, 求函数 $u \in C^2(D)$ 使得

(i)

$$Lu = 0, \quad \text{在 } D \text{ 中}; \tag{9.2.13}$$

(ii)

$$\lim_{x \to y, x \in D} u(x) = \phi(y), \quad \text{对任意的正则点 } y \in \partial D. \tag{9.2.14}$$

为了解决上述问题, 先介绍几个概念. 设 G 为 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集, $T_G = \inf\{t > 0; X_t \in G\}$ 是 G 的首达时, 如果对任意的 x, 有 $Q^x[T_G = 0] = 0$, 则称 G(对于 X_t) 为薄集 (直观地, 对所有的初始点, 过程几乎必然地不会马上碰到 G). 可数个薄集的并集称为半极集. 若 F 为 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集, 如果对任意的 x, $Q^x[T_F < \infty] = 0$, 则称 F(对于 X_t) 为极集 (直观地, 对所有的初始点, 过程几乎必然地永远不会碰到 F). 显然每个极集是半极集, 但反过来未必成立 (考虑例 9.2.1 中的过程).

下面先建立命题: 如果上述广义 Dirichlet 问题的解存在, 则它必定是定理 9.2.5 中的随机 Dirichlet 问题的解. 其中假定 X_t 满足 Hunt 条件 (H):

$$(\mathrm{H}): \ X_t \text{的每个半极集都是 } X_t \text{ 的极集}. \tag{9.2.15}$$

而布朗运动满足条件 (H) (Blumenthal, Getoor, 1968). 因此由 Girsanov 定理可知, 如果 Itô 扩散过程的扩散系数矩阵有有界逆, 对任意的 $T < \infty$ 飘移系数满足 Novikov 条件, 则该 Itô 扩散过程满足条件 (H).

另外, 还需要下面的结果, 其证明见文献 (Blumenthal, Getoor, 1968).

引理 9.2.12　设 $U \subset D$ 是开集, I 表示 U 的非正则点集, 那么 I 是半极集.

定理 9.2.13　假定 X_t 满足 Hunt 条件 (H), 设 ϕ 是 ∂D 上的有界连续函数. 假定存在一个有界函数 $u \in C^2(D)$ 使得

(i) $Lu = 0$, 在 D 内.

(ii) $\lim_{x \to y, x \in D} u(x) = \phi(y)$ 对任意的正则点 $y \in \partial D$.

那么 $u(x) = E^x[\phi(X_{\tau_D})]$.

证明　设 $\{D_k\}$ 如定理 9.1.1 证明中的一样, 由引理 9.2.3 b), u 是 X 调和的, 因此有

$$u(x) = E^x[u(X_{\tau_k})], \quad \forall\, x \in D_k, \forall k.$$

如果 $k \to \infty$, 那么 $X_{\tau_k} \to X_{\tau_D}$. 因此, 如果 X_{τ_D} 是正则点, 则 $u(X_{\tau_k}) \to \phi(X_{\tau_D})$. 从引理 9.2.12, 知道 ∂D 的非正则点集 I 是半极集. 由条件 (H) 可知, 集合 I 是极集. 从而有 $X_{\tau_D} \notin I$ 几乎必然地成立. 因此

$$u(x) = \lim E^x[u(X_{\tau_k})] = E^x[\phi(X_{\tau_D})],$$

如所要证.

反过来, 在什么条件下, 随机 Dirichlet 问题的解也是广义 Dirichlet 问题 (9.2.13), (9.2.14) 的解? 这是一个困难的问题, 虽然不能完全解决它, 但较为安慰的是有下面的部分回答.

定理 9.2.14 假设 L 在 D 内是一致椭圆型的, 即 $[a_{ij}]$ 的特征值在 D 内远离 0 点. 设 ϕ 是 ∂D 上的有界连续函数,

$$u(x) = E^x[\phi(X_{\tau_D})],$$

那么 $u \in C^{2+\alpha}(D)$, $\forall \alpha < 1$ 且 u 为 Dirichlet 问题 (9.2.13), (9.2.14) 的解, 即

(i) $Lu = 0$, 在 D 内.

(ii)$_r$ $\lim_{x \to y, x \in D} u(x) = \phi(y)$ 对任意的正则点 $y \in \partial D$.

附注 如果 k 是一个整数, $\alpha > 0$, G 是开集, $C^{k+\alpha}(G)$ 表示 G 上的函数的集合. 其中要求这些函数有直到 k 阶的偏导数, 且其为 Lipschitz(Hölder) 连续的, Lipschitz 指数为 α.

证明 选择开球 Δ 使得 $\bar{\Delta} \subset D$, 设 $f \in C(\partial \Delta)$. 那么由偏微分方程的一般理论知, 对任意的 $\alpha < 1$, 存在 $\bar{\Delta}$ 上的连续函数 u 使得 $u|_{\Delta} \in C^{2+\alpha}(\Delta)$ 且有 (Dynkin, 1965, 第 226 页)

$$Lu = 0, \quad \text{在 } \Delta \text{ 内}; \tag{9.2.16}$$

$$u = f, \quad \text{在 } \partial\Delta \text{ 上}, \tag{9.2.17}$$

因为 $u|_{\Delta} \in C^{2+\alpha}(\Delta)$, 如果 K 为 Δ 的任意紧子集, 则存在一个常数 C, 它仅依赖于 K 和 L 的系数的 C^{α} 范数. 使得 (Bers, John, Schechter, 1964, 第 232 页, 定理 3)

$$\|u\|_{C^{2+\alpha}(K)} \leqslant C(\|Lu\|_{C^{\alpha}(\Delta)} + \|u\|_{C(\Delta)}). \tag{9.2.18}$$

结合 (9.2.16), (9.2.17) 和 (9.2.18), 可得到

$$\|u\|_{C^{2+\alpha}(K)} \leqslant C\|f\|_{C(\partial\Delta)}. \tag{9.2.19}$$

由唯一性 (定理 9.2.13) 可知

$$u(x) = \int u(y) d\mu_x(y), \tag{9.2.20}$$

这里 $d\mu_x = Q^x[X_{\tau_\Delta} \in dy]$ 是 X_t 首次逸出 Δ 的分布. 从 (9.2.19) 可得

$$\left| \int f d\mu_{x_1} - \int f d\mu_{x_2} \right| \leqslant C\|f\|_{C(\partial\Delta)} |x_1 - x_2|^2, \quad x_1, x_2 \in K. \tag{9.2.21}$$

由于对 $\partial\Delta$ 上给定的连续函数, 可有 $C^\infty(\partial\Delta)$ 中的函数一致地逼近. 因此 (9.2.21) 对任意的 $f \in C(\partial\Delta)$ 都成立. 由此有

$$\|\mu_{x_1} - \mu_{x_2}\| \leqslant C|x_1 - x_2|^\alpha, \quad x_1, x_2 \in K, \tag{9.2.22}$$

这里 $\|\ \|$ 表示 $\partial\Delta$ 上的测度的算子范数. 故此, 如果 g 是 $\partial\Delta$ 上的任意有界可测函数, 则函数

$$\hat{g}(x) = \int g(y)d\mu_x(y) = E^x[g(X_{\tau_\Delta})]$$

属于 $C^\alpha(K)$. 因为对任意的开集 U, 只要 $\bar{U} \subset D$ 及 $x \in U$, 有 $u(x) = E^x[u(X_{\tau_U})]$(引理 9.2.4). 应用于 $g = u$, 得出: 对任意的紧子集 $M \subset D$, $u \in C^\alpha(M)$. 因此, 可应用于问题 (9.2.16), (9.2.17) 的解. 设 $f = u$, 由此得到对任意的紧子集 $M \subset D$ 有

$$u(x) = E^x[u(X_{\tau_D})] \in C^{2+\alpha}(M),$$

因此由引理 9.2.3 a) 可得 (i) 成立.

为了得到 $(\mathrm{ii})_r$, 应用抛物型微分方程理论中的一个定理: Kolmogorov 后向方程

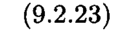
$$Lv = \frac{\partial v}{\partial t}$$

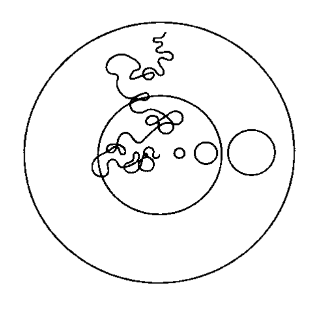
有一个基本解 $v = p(t, x, y)$, 对 $t > 0$ 关于 t, x, y 是联合连续的, 对每个给定的 $t > 0$, 关于 x, y 是有界的 (Dynkin, 1965 II, 第 227 页, 定理 0.4). 由有界收敛定理可知过程 X_t 是一个强 Fell 过程, 即对任意的 $t > 0$ 及任意的有界可测函数 f, 函数

$$x \to E^x[f(X_t)] = \int_{\mathbf{R}^n} f(y)p(t, x, y)dy$$

是连续的. 一般地, 如果 X_t 是一个强 Fell Itô 过程, $D \subset \mathbf{R}^n$ 是开集, 那么 (Dynkin, 1965, II, 第 32-33 页, 定理 13.3)

$$\lim_{x \to y, x \in D} E^x[\phi(X_{\tau_D})] = \phi(y), \quad \text{任意的正则点 } y \in \partial D, \quad \text{任意的有界函数 } \phi \in C(\partial D).$$





因此 u 满足性质 $(\mathrm{ii})_r$, 证明完成.

例 9.2.15　已经 (从例 9.2.1) 看到条件 (9.1.3) 一般并不满足. 这个例子表明即使 L 是椭圆型的, 它也不一定满足. 再考虑例子 9.2.11, 在此情形, 0 点不是正则点. 选择 $\phi \in C(\partial D)$ 使得

$$\phi(0) = 1, \quad 0 \leqslant \phi(y) < 1, \quad \text{对 } y \in \partial D \setminus \{0\}.$$

因为 $\{0\}$ 对 B_t 来说是极集 (见练习 9.7 a), 故有 $B^0_{\tau_D} \neq 0$ a.s., 因此

$$u(0) = E^0[\phi(B_{\tau_D})] < 1.$$

由平均值性质 (7.2.9) 的一个稍微的推广 (见练习 9.4) 可知

$$E^0[u(X_{\sigma_k})] = E^0[\phi(X_{\tau_D})] = u(0) < 1, \tag{9.2.24}$$

这里

$$\sigma_k = \inf\left\{t > 0,\ B_t \notin D \cap \left\{|x| < \frac{1}{k}\right\}\right\}, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

由此可知, 当 $x \to 0$ 时, 不可能有 $u(x) \to 1$. 因此条件 (9.1.3) 在此并不成立.

一般地, 可证明布朗运动的正则点就是经典位势理论意义上的正则点, 即在 ∂D 上的点 y 处, 对任意的 $\phi \in C(\partial D)$, 广义 Perron-Wiener-Brelot 解的极限与 $\phi(y)$ 一致 (Doob, 1984; Port, Stone, 1979; Rao, 1977).

例 9.2.16 设 D 表示无穷带型域

$$D = \{(t, x) \in \mathbf{R}^2;\ x < R\}, \text{ 这里 } R \in \mathbf{R},$$

L 表示微分算子

$$Lf(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad f \in C^2(D),$$

在 $C_0^2(\mathbf{R}^2)$ 上其生成元与 L 一致的 Itô 扩散是 (见例 9.2.10)

$$X_t = (s + t, B_t), \quad t \geqslant 0.$$

而 ∂D 上的所有点都是这个过程的正则点, 在此情形, 不难证明 (9.1.14) 成立. 即 $\tau_D < \infty$ a.s. (见练习 7.4).

假定 ϕ 是 $\partial D = \{(t, R), t \in \mathbf{R}\}$ 上的有界函数. 那么由定理 9.2.5 可知, 函数

$$u(s, x) = E^{s,x}[\phi(X_{\tau_D})]$$

是随机的 Dirichlet 问题 (9.2.6), (9.2.7) 的解. 这里 $E^{s,x}$ 表示关于初始值为 (s, x) 的 X 的概率律 $Q^{s,x}$ 的期望. 那么 u 是否也为问题 (9.2.13), (9.2.14) 的解呢? 利用 Laplac 变换, 可以求得 X 在 ∂D 上的首次逸出点的分布, 即求得 B_t 首次达到值 R 的时间 $t = \hat{\tau}$ 的分布 ((Karlin, Taylor, 1975, 第 363 页), 也可见练习 7.19). 相应的结果是

$$P^x[\hat{\tau} \in dt] = g(x, t)dt,$$

这里

$$g(x,t)=\begin{cases}(R-x)(2\pi t^3)^{-1}\exp\left(-\dfrac{(R-x)^2}{2t}\right), & t>0\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases} \tag{9.2.25}$$

因此解 u 可以写成

$$u(s,x)=\int_0^\infty \phi(s+t,R)g(x,t)dt=\int_s^\infty \phi(r,R)g(x,r-s)dr.$$

从 u 的显式表达式中, 显然有 $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ 和 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 都是连续的, 由引理 9.2.3 可得出在 D 内有 $Lu=0$. 因此 u 满足 (9.2.13). 那么如何得到性质 (9.2.14) 呢? 不难看出, 对 $t>0$, 有

$$E^{t_0,x}[f(X_t)]=(2\pi t)^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbf{R}} f(t_0+t,y)\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right)dy.$$

对任意有界的 (t,x) 可测的函数 f 都成立. (见 (2.2.2)). 因此 X_t 不是一个强 Feller 过程, 故此不能应用 (9.2.23) 去得到 (9.2.14). 然而容易直接证明, 如果 $|y|=R$, $t_1>0$, 那么对任意的 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 使得 $|x-y|<\delta, |t-t_1|<\delta \Rightarrow Q^{t,x}[X_{\tau_D}\in N]\geqslant 1-\varepsilon$, 这里 $N=[t_1-\varepsilon,t_1+\varepsilon]\times\{y\}$. 由此易推得 (9.2.14).

附注　如上面的例子 (和例子 9.2.1) 所表明的那样, Itô 扩散不一定是一个强 Feller 过程. 然而它通常是一个 Feller 过程 (引理 8.1.4).

9.3　Poisson 问题

设 $L=\sum a_{ij}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum b_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, 如前一样是区域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上的一个半椭圆型偏微分算子. X_t 是由 (9.1.4), (9.1.5) 描述的 Itô 扩散. 本节研究 Poisson 问题 (9.2.3), (9.2.4). 如同在 9.2 节中的理由一样, 把该问题广义化如下:

广义 Poisson 问题

给定 D 上的一个连续函数 g, 求 D 中的 C^2 函数 v 使得

a)

$$Lv=-g,\quad \text{在 } D \text{ 内;} \tag{9.3.1}$$

b)

$$\lim_{x\to y, x\in D} v(x)=0,\quad \text{任意的正则点 } y\in\partial D. \tag{9.3.2}$$

首先将研究该问题的随机修正. 然后再研究相应的随机解与原问题 (9.3.1), (9.3.2) 的解 (如果存在) 之间的关系:

定理 9.3.1 (随机 Poisson 问题的解) 假定

$$E^x\left[\int_0^{\tau_D}|g(X_s)|ds\right]<\infty,\quad \forall\, x\in D \tag{9.3.3}$$

(比如, 当 g 有界且 $E^x[\tau_D]<\infty$, $\forall x\in D$, 则上式成立). 定义

$$v(x)=E^x\left[\int_0^{\tau_D}g(X_s)ds\right], \tag{9.3.4}$$

那么

$$\mathcal{A}v=-g,\quad 在\ D\ 内, \tag{9.3.5}$$

且

$$\lim_{t\uparrow\tau_D}v(X_t)=0\ \text{ a.s. } Q^x,\ \forall\, x\in D. \tag{9.3.6}$$

证明 选择开集 U, $x\in U\subset\subset D$. 记 $\eta=\int_0^{\tau_D}g(X_s)ds$, $\tau=\tau_U$. 则由强 Markov 性质 (7.2.5) 得

$$\begin{aligned}\frac{E^x[v(X_\tau)]-v(x)}{E^x[\tau]}&=\frac{1}{E^x[\tau]}(E^x[E^{X_\tau}[\eta]]-E^x[\eta])\\&=\frac{1}{E^x[\tau]}(E^x[E^x[\theta_\tau\eta|\mathcal{F}_\tau]]-E^x[\eta])=\frac{1}{E^x[\tau]}(E^x[\theta_\tau\eta-\eta]).\end{aligned}$$

由下面的和的形式逼近 η:

$$\eta^{(k)}=\sum g(X_{t_i})\mathcal{X}_{\{t_i<\tau_D\}}\Delta t_i,$$

因为 (见 (7.2.6) 的讨论)

$$\theta_t\eta^{(k)}=\sum g(X_{t_i+t})\mathcal{X}_{\{t_i+t<\tau_D^t\}}\Delta t_i,\quad \forall\, k,$$

有

$$\theta_\tau\eta=\int_\tau^{\tau_D}g(X_s)ds, \tag{9.3.7}$$

因此由 g 的连续性, 当 $U\downarrow x$ 时, 有

$$\frac{E^x[v(X_\tau)]-v(x)}{E^x[\tau]}=\frac{-1}{E^x[\tau]}E^x\left[\int_0^\tau g(X_s)ds\right]\to -g(x),$$

这样证明了 (9.3.5).

记 $H(x)=E^x\left[\int_0^{\tau_D}|g(X_s)|ds\right]$, D_k,τ_k, 如定理 9.2.5 的证明一样. 那么如上面

同样的讨论, 由控制收敛定理可得到

$$E^x[H(X_{\tau_k\wedge t})]=E^x\left[E^x\left[\int_{\tau_k\wedge t}^{\tau_D}|g(X_s)|ds|\mathcal{F}_{\tau_k\wedge t}\right]\right]$$
$$=E^x\left[\int_{\tau_k\wedge t}^{\tau_D}|g(X_s)|ds\right]\to 0,\quad \text{当 } t\to\tau_D,\ k\to\infty \text{ 时},$$

这样可得出 (9.3.6).

附注　对于函数 g 满足 (9.3.3), 定义算子 $\mathcal{R}$ 如下:

$$(\mathcal{R}g)(x)=\check{g}(x)=E^x\left[\int_0^{\tau_D}g(X_s)ds\right],$$

那么 (9.3.5) 能写成

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}g)=-g, \tag{9.3.8}$$

即算子 $-\mathcal{R}$ 是算子 $\mathcal{A}$ 的右逆. 类似地, 如果定义

$$\mathcal{R}_\alpha g(x)=E^x\left[\int_0^{\tau_D}g(X_s)e^{-\alpha s}ds\right],\quad \alpha\geqslant 0, \tag{9.3.9}$$

那么如定理 8.1.5 的证明方法一样, 可得到

$$(\mathcal{A}-\alpha)\mathcal{R}_\alpha g=-g,\quad \alpha\geqslant 0 \tag{9.3.10}$$

(如果 $\alpha>0$, 那么假定 g 是有界的 (连续性如前) 可取代假定 (9.3.3)).

因此可以认为算子 $\mathcal{R}_\alpha$ 是第 8 章中讨论的预解算子 R_α 的广义化. 公式 (9.3.10) 类似于定理 8.1.5 b).

下面将证明如果广义化问题 (9.3.1), (9.3.2) 的解 v 存在, 那么 (9.3.4) 中的 v 是随机问题 (9.3.5), (9.3.6) 的解.

定理 9.3.2 (Poisson 方程的唯一性定理)　假定 X_t 满足 Hunt 条件 (H)((9.2.15)), 且 (9.3.3) 成立. 假如存在一个函数 $v\in C^2(D)$ 及常数 C 使得

$$|v(x)|\leqslant C\left(1+E^x\left[\int_0^{\tau_D}|g(X_s)|ds\right]\right),\quad \forall\, x\in D, \tag{9.3.11}$$

同时具有性质

$$Lv=-g,\quad \text{在 } D \text{ 内}, \tag{9.3.12}$$

$$\lim_{x\to y,x\in D}v(x)=0,\quad \text{任意的正则点 } y\in\partial D, \tag{9.3.13}$$

那么, $v(x)=E^x\left[\int_0^{\tau_D}g(X_s)ds\right]$.

证明 设 D_k, τ_k 如定理 9.2.5 的证明中一样, 那么由 Dynkin 公式, 有

$$E^x[v(X_{\tau_k})]-v(x)=E^x\left[\int_0^{\tau_k}(Lv)(X_s)ds\right]=-E^x\left[\int_0^{\tau_k}g(X_s)ds\right],$$

由条件 (H) 及引理 9.2.12 可知, X_{τ_D} 几乎必然为正则点, 由控制收敛定理可得

$$v(x)=\lim_{k\to\infty}\left(E^x[v(X_{\tau_k})]+E^x\left[\int_0^{\tau_k}g(X_s)ds\right]\right)=E^x\left[\int_0^{\tau_D}g(X_s)ds\right].$$

最后, 结合 Dirichlet 问题和 Poisson 问题可得到下面的结果:

定理 9.3.3 (组合随机 Dirichlet 和 Poisson 问题的解) 假定 (9.1.14) 成立. 设 $\phi\in C(\partial D)$ 是有界的. $g\in C(D)$ 满足

$$E^x\left[\int_0^{\tau_D}|g(X_s)|ds\right]<\infty,\quad \forall\, x\in D. \tag{9.3.14}$$

定义

$$w(x)=E^x[\phi(X_{\tau_D})]+E^x\left[\int_0^{\tau_D}g(X_s)ds\right],\quad x\in D. \tag{9.3.15}$$

a) 那么有

$$\mathcal{A}w=-g,\quad 在\ D\ 内, \tag{9.3.16}$$

且

$$\lim_{t\uparrow\tau_D}w(X_t)=\phi(X_{\tau_D})\text{ a.s. }Q^x,\quad \forall\, x\in D. \tag{9.3.17}$$

b) 而且, 如果存在一个函数 $w_1\in C^2(D)$ 及常数 C 使得

$$|w_1(x)|\leqslant C\left(1+E^x\left[\int_0^{\tau_D}|g(X_s)|ds\right]\right),\quad \forall\, x\in D, \tag{9.3.18}$$

同时 w_1 满足 (9.3.16), (9.3.17). 那么 $w_1=w$.

附注 类似于定理 9.2.14 中所用的方法, 可证明如果 L 在 D 内是一致椭圆型的, 且 $g\in C^\alpha(D)$(对某个 $\alpha>0$) 是有界的, 那么 (9.3.15) 给出的函数 w 为 Dirichlet-Poisson 问题的解, 即

$$Lw=-g,\quad 在\ D\ 内, \tag{9.3.19}$$

且

$$\lim_{x\to y,x\in D}w(x)=\phi(y),\quad 任意的正则点\ y\in\partial D. \tag{9.3.20}$$

Green 测度

公式 (9.3.4) 给出的解 v 可以重新写成如下的形式:

定义 9.3.4 (相对于 D, X_t 在 x 处的)　Green 测度 $G(x,\cdot)$ 定义为

$$G(x,H) = E^x\left[\int_0^{\tau_D} \mathcal{X}_H(X_s)ds\right], \quad H \subset \mathbf{R}^n \text{为 Borel 集} \tag{9.3.21}$$

或

$$\int f(y)G(x,dy) = E^x\left[\int_0^{\tau_D} f(X_s)ds\right], \quad f \text{ 有界连续}, \tag{9.3.22}$$

换句话说, $G(x,H)$ 是过程逸出 D 之前停留在 H 中的期望时间长度. 如果 X_t 是布朗运动, 那么

$$G(x,H) = \int_H G(x,y)dy,$$

这里 $G(x,y)$ 是相对于 D 的经典的 Green 函数, dy 表示 Lebesgue 测度 (Doob, 1984; Pert, Stone, 1979; Rao, 1977). 也可见下面的例子 9.3.6.

注意, 利用 Fubini 定理, 可得到 Green 测度 G 与 X_t 在 D 中的转移测度 $Q_t^D(x,H) = Q^x[X_t \in H, t < \tau_D]$ 之间的如下关系

$$G(x,H) = E^x\left[\int_0^{\infty} \mathcal{X}_H(X_s)\cdot \mathcal{X}_{[0,\tau_D)}(s)ds\right] = \int_0^{\infty} Q_t^D(x,H)dt. \tag{9.3.23}$$

从 (9.3.22) 得到

$$v(x) = E^x\left[\int_0^{\tau_D} g(X_s)ds\right] = \int_D g(y)G(x,dy), \tag{9.3.24}$$

它是大家熟知的关于经典的 Poisson 方程的解的公式.

同时利用 Green 函数, 可把 Dynkin 公式看成是经典的 Green 公式的推广.

推论 9.3.5 (Green 公式)　设 $E^x[\tau_D] < \infty$, $\forall\, x \in D$, 假设 $f \in C_0^2(\mathbf{R}^n)$, 那么

$$f(x) = E^x[f(X_{\tau_D})] - \int_D (L_X f)(y)G(x,dy), \tag{9.3.25}$$

特别, 如果 $f \in C_0^2(D)$ 有

$$f(x) = -\int_D (L_X f)(y)G(x,dy). \tag{9.3.26}$$

(如前,

$$L_X = \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum(\sigma\sigma^T)_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j},$$

当 $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$ 时).

证明 由 Dynkin 公式和 (9.3.24) 有

$$E^x[f(X_{\tau_D})] = f(x) + E^x\left[\int_0^{\tau_D} (L_X f)(X_s)ds\right] = f(x) + \int_D (L_X f)(y)G(x, dy).$$

附注 结合 (9.3.8) 和 (9.3.26) 可看到, 如果对任意的紧集 $K \subset D$, 任意的 $x \in D$, $E^x[\tau_k] < \infty$. 那么 $-\mathcal{R}$ 是 $C_0^2(D)$ 上的算子 $\mathcal{A}$ 的逆:

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}f) = \mathcal{R}(\mathcal{A}f) = -f, \quad \forall f \ \in C_0^2(D), \tag{9.3.27}$$

更一般地, $\forall\ \alpha > 0$, 可得到类似于定理 8.1.5 的下式

$$(\mathcal{A} - \alpha)(\mathcal{R}_\alpha f) = \mathcal{R}_\alpha(\mathcal{A} - \alpha)f = -f, \quad \forall\ f \in C_0^2(D), \tag{9.3.28}$$

在 (9.3.10) 中已建立了一半. 另一半由下面的 Dynkin 公式的一个有用的延拓可得到

$$E^x[e^{-\alpha\tau} f(X_\tau)] = f(x) + E^x\left[\int_0^\tau e^{-\alpha s}(A - \alpha)f(X_s)ds\right], \tag{9.3.29}$$

如果 $\alpha > 0$, 上式对任意的停时 $\tau \leqslant \infty$, 及所有的 $f \in C_0^2(\mathbf{R}^n)$ 都成立 (见练习 9.6).

例 9.3.6 如果 $X_t = B_t$ 为 1 维布朗运动, 在有界区间 $(a, b) \subset \mathbf{R}$ 内, 可显式地求得 Green 函数 $G(x, y)$. 为达到这一目的, 选择有界连续函数 $g : (a, b) \to \mathbf{R}$, 计算

$$v(x) := E^x\left[\int_0^{\tau_D} g(B_t)dt\right].$$

由推论 9.1.2 知, v 是如下微分方程

$$\frac{1}{2}v''(x) = -g(x),$$

$$v(a) = v(b) = 0$$

的解. 对上式积分两次并利用边界条件, 可得到

$$v(x) = \frac{2(x-a)}{b-a}\int_a^b \left(\int_a^y g(z)dz\right)dy - 2\int_a^x \left(\int_a^y g(z)dz\right)dy.$$

交换积分次序, 重写上式为

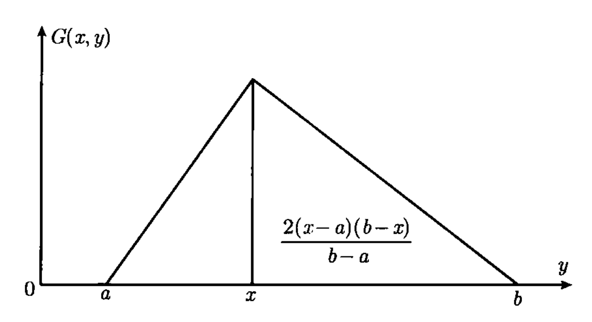
$$v(x) = \int_a^b g(y)G(x, y)dy,$$

这里

$$G(x, y) = \frac{2(x-a)(b-y)}{b-a} - 2(x-y)\cdot \mathcal{X}_{(-\infty,x)}(y), \tag{9.3.30}$$

(9.3.30) 即为布朗运动在区间 (a,b) 内的 Green 函数.

在较高的维数 n 时, 初始点为 x 的布朗运动的 Green 函数 $y \to G(x,y)$ 在点 x 不再是连续的. 当 $n=2$ 时, 它将有一个对数奇点 $\left(\text{即阶为 } \ln \dfrac{1}{|x-y|} \text{ 的奇点}\right)$. 当 $n>2$ 时, 奇点的阶为 $|x-y|^{2-n}$.



练　　习

9.1*. 在下面的每种情形下找到一个 Itô 扩散, 使它的生成元与 L 在 C_0^2 中是一致的:

a) $Lf(t,x)=\alpha\dfrac{\partial f}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\beta^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$; α,β 为常数.

b) $Lf(x_1,x_2)=a\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+b\dfrac{\partial f}{\partial x_2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right)$; a,b 为常数.

c) $Lf(x)=\alpha xf'(x)+\dfrac{1}{2}\beta^2 f''(x)$; α, β 为常数.

d) $Lf(x)=\alpha f'(x)+\dfrac{1}{2}\beta^2x^2 f''(x)$; α, β 为常数.

e) $Lf(x_1,x_2)=\ln(1+x_1^2)\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+x_2\dfrac{\partial f}{\partial x_2}+x_2^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+2x_1x_2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}+2x_1^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$.

9.2*. 利用定理 9.3.3 求下面的边界值问题的有界解:

a) $$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\phi(t,x), & 0<t<T,\ x\in\mathbf{R},\\ u(T,x)=\psi(x), & x\in\mathbf{R},\end{cases}$$

这里 ϕ, ψ 是给定的有界连续函数.

b) $$\begin{cases}\alpha xu'(x)+\dfrac{1}{2}\beta^2x^2u''(x)=0, & 0<x<x_0,\\ u(x_0)=x_0^2,\end{cases}$$

这里 α, β 是给定的常数, $\alpha\geqslant\dfrac{1}{2}\beta^2$.

c) 如果 $\alpha<\dfrac{1}{2}\beta^2$, 则 b) 有无穷多个有界解, 如果要有唯一性, 则必须要在 $x=0$ 处附加

一个边界条件. 用定理 9.3.3 的观点解释.

9.3*. (利用布朗运动) 写出并比较下面两个边界值问题的解 $u(t,x)$:

a) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\Delta u=0, & 0<t<T,\ x\in\mathbf{R}^n, \\ u(T,x)=\phi(x), & x\in\mathbf{R}^n; \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{1}{2}\Delta u=0, & 0<t<T,\ x\in\mathbf{R}^n, \\ u(0,x)=\psi(x), & x\in\mathbf{R}^n. \end{cases}$$

9.4. 设 G 和 H 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界开子集, $G\subset H$, 设 B_t 是 n 维的布朗运动. 利用 B_t 的 (H) 性质证明

$$\inf\{t>0;\ B_t\notin H\}=\inf\{t>\tau_G;\ B_t\notin H\}\ \text{a.s.}$$

即由 (7.2.6) 的记号有

$$\tau_H=\tau_H^{\alpha},\quad \text{这里 } \alpha=\tau_G,$$

利用它证明如果 $X_t=B_t$, 则对所有的有界集 $G\subset H$, 平均值性质 (7.2.9) 成立, 即在此时不必要求 $G\subset\subset H$. 这样证明了 (9.2.24) 式.

9.5. (Laplace 算子的特征值) 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是开集, $\lambda\in\mathbf{R}$.

a) 假设存在解 $u\in C^2(D)\cap C(\bar{D})$, u 不恒为零, 使得

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\Delta u=\lambda u, & \text{在 } D \text{ 内}; \\ u=0, & \text{在 } \partial D \text{ 上}. \end{cases} \tag{9.3.31}$$

证明一定有 $\lambda>0$. 提示: 如果在 D 内有 $\frac{1}{2}\Delta u=-\lambda u$, 那么

$$\left\langle\frac{1}{2}\Delta u,u\right\rangle=\langle-\lambda u,u\rangle,$$

这里

$$\langle u,v\rangle=\int_D u(x)v(x)dx,$$

再利用分部积分.

b) 证明: 如果 D 是光滑的, 则存在 $0<\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n<\cdots$, 这里 $\lambda_n\to\infty$. 使得 $\lambda=\lambda_n$ 时, (9.3.31) 成立, $n=1,2,\cdots$, λ 不可能取其他的值. $\{\lambda_n\}$ 称为算子 $-\frac{1}{2}\Delta$ 在区域 D 内的特征值, (9.3.31) 的相应的 (非平凡) 解 u_n 称为特征函数. 对最小的特征值 λ_0, 有一个有趣的概率解释. 下面的结果将指出这点. 记 $\tau=\tau_D=\inf\{t>0;B_t\notin D\}$, 选择 $\rho>0$, 定义

$$w_\rho(x)=E^x[\exp(\rho\tau)],\quad x\in D.$$

证明: 如果 $w_\rho(x)<\infty$, $\forall\,x\in D$. 那么 ρ 不是 $-\frac{1}{2}\Delta$ 的特征值. 提示: 设 u 是 (9.3.31) 的一个解, 其中 $\lambda=\rho$. 应用 Dynkin 公式于过程 $dY_t=(dt,dB_t)$ 及函数 $f(t,x)=e^{\rho t}u(x)$, 推出对 $x\in D$, $u(x)=0$.

c) 推出

$$\lambda_0\geqslant\sup\{\rho;\ E^x[\exp(\rho\tau)]<\infty,\ \ \forall x\in D\},$$

这里事实上是等式 (Durrett, 1984).

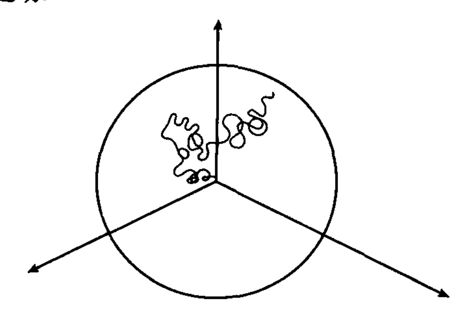
9.6. 证明公式 (9.3.29), 通过应用 Dynkin 公式于过程 $dY_t = \begin{pmatrix} dt \\ dX_t \end{pmatrix}$ 及函数 $g(y) = g(t,x) = e^{-\alpha t} f(x)$, 举例说明.

9.7. a) 设 B_t 是 $\mathbf{R}^2$ 中的布朗运动, 证明

$$P^x[\exists\ t > 0;\ B_t = y] = 0, \quad \forall\ x,\ y \in \mathbf{R}^2.$$

提示: 首先假设 $x \neq y$, 可选择 $y = 0$. 一个可能的方法是应用 Dynkin 公式, 其中 $f(u) = \ln|u|$, $\tau = \inf\{t > 0;\ |B_t| \leqslant \rho$或$|B_t| \geqslant R\}$, 这里 $0 < \rho < R$. 再令 $\rho \to 0$, $R \to \infty$. 如果 $x = y$, 考虑 $P^x[\exists\ t > 0;\ B_t = y]$ 再利用 Markov 性质.

b) 设 $B_t = (B_t^{(1)},\ B_t^{(2)})$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的布朗运动. 证明 $\tilde{B}_t = (-B_t^{(1)},\ B_t^{(2)})$ 也是一个布朗运动.



c) 证明 $0 \in \mathbf{R}^2$ 是平面区域 D:

$$D = \{(x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2;\ x_1^2 + x_2^2 < 1\} \backslash \{(x_1,0);\ x_1 \geqslant 0\}$$

的正则边界点 (相对于布朗运动).

d) 证明 $0 \in \mathbf{R}^3$ 是 3 维区域 U:

$$U = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3;\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\} \backslash \{(x_1,0,0);\ x_1 \geqslant 0\}$$

的非正则边界点 (相对于布朗运动).

9.8*. a) 找一个 Itô 扩散 X_t 和一个可测集 G, 使得 G 为 X_t 的半极集但不是极集.

b) 找一个 Itô 扩散和可数多个薄集 H_k; $k = 1,2,\cdots$, 使得 $\cup_{k=1}^{\infty} H_k$ 不是薄集.

9.9. a) 设 X_t 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 Itô 扩散. g 是连通开集 $G \subset \mathbf{R}^n$ 上局部有界的实 X_t 调和函数且不为常数. 证明 g 满足下面的最大化原理的弱形式: g 在 G 内任一点没有 (局部或全局) 最大值 (类似地, g 满足最小值原理).

b) 举例说明, 不为常数的有界 X_t 调和函数 g 能有 (非严格的) 全局最大值. 提示: 考虑朝右的匀速运动.

9.10*. 求边界值问题的 (随机) 解 $f(t,x)$:

$$\begin{cases} K(x)e^{-\rho t} + \dfrac{\partial f}{\partial t} + \alpha x \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\beta^2 x^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, & x > 0, 0 < t < T, \\ f(T,x) = e^{-\rho T}\phi(x), & x > 0, \end{cases}$$

这里 K, ϕ 是给定的函数. T, ρ, α, β 都为常数, $\rho > 0$, $T > 0$. 提示: 考虑 $dY_t = (dt, dX_t)$, 这里 X_t 是一个几何布朗运动.

9.11. a) Poisson 核定义为

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2},$$

这里 $r \geqslant 0,\ \theta \in [0, 2\pi],\ z = re^{i\theta} \in C,\ i = \sqrt{-1}$.

Poisson 公式表明, 如果 D 表示平面 $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ 中的单位圆, $h \in C(\bar{D})$ 使得在 D 中 $\Delta h = 0$, 那么

$$h(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t-\theta)h(e^{i\theta})dt.$$

证明: 对于初始点为 $z \in D$ 的布朗运动, 从集合 $F \subset \partial D$ 中首次逸出 D 的概率为

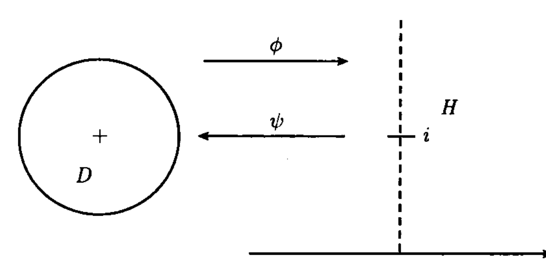
$$\frac{1}{2\pi}\int_F P_r(t-\theta)dt, \quad 这里\ z = re^{i\theta}.$$

b) 函数

$$w = \phi(z) = i\frac{1+z}{1-z}$$

把单位圆 $D = \{|z| < 1\}$ 共形映射成半平面 $H = \{w = u + iv;\ v > 0\}$, $\phi(\partial D) = \mathbf{R}$, $\phi(0) = i$. 利用例 8.5.9 证明: 如果 μ 表示布朗运动在半平面 H 内点 $i = (0, 1)$ 处的调和测度, 那么

$$\int_{\mathbf{R}} f(\xi)d\mu(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi(e^{it}))dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\phi(z))}{z}dz.$$



c) 把 $w = \phi(z)$ $\left(即\ z = \psi(w) := \phi^{-1}(w) = \dfrac{w-i}{w+i}\right)$ 代入上面的积分, 证明:

$$\int_{\mathbf{R}} f(\xi)d\mu(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{\partial H} f(w)\frac{dw}{|w-i|^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{dx}{x^2+1}.$$

d) 证明: 布朗运动在 H 内点 $w = u + iv \in H$ 处的调和测度 μ_H^w 为

$$d\mu_H^w(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{v}{(x-u)^2+v^2}dx.$$

9.12. (边界值问题的 Feynman-Kac 公式) 设 X_t 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个 Itô 扩散, 它的生成元与给定的 $C_0^2(\mathbf{R}^n)$ 上的偏微分算子 L 一致. 设 D, ϕ 和 g 如定理 9.3.3 中一样, $q(x) \geqslant 0$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数, 考虑边界值问题: 求 $h \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ 使得

$$\begin{cases} Lh(x) - q(x)h(x) = -g(x), & 在\ D\ 内; \\ \lim_{x\to y} h(x) = \phi(y), & y \in \partial D. \end{cases}$$

证明如果存在有界解 h. 那么

$$h(x) = E^x\left[\int_0^{\tau_D} e^{-\int_0^t q(X_s)ds}g(X_t)dt + e^{-\int_0^{\tau_D} q(X_s)ds}\phi(X_{\tau_D})\right].$$

与 Feynman-Kac 公式进行比较. 提示: 如定理 8.2.1 b) 的证明过程一样. 关于边界值问题的随机解的更多的信息可见文献 (Freidlin, 1985).

9.13. 设 $D=(a,b)$ 是一个有界区间.

a) 对 $x\in\ \mathbf{R}$, 定义

$$X_t=X_t^x=x+\mu t+\sigma B_t,\quad t\geqslant 0,$$

这里 μ, σ 为常数, $\sigma\neq 0$. 利用推论 9.1.2 计算

$$w(x):=E^x[\phi(X_{\tau_D})]+E^x\left[\int_0^{\tau_D}g(X_t)dt\right],$$

其中 $\phi:\{a,b\}\to\mathbf{R}$ 及 $g:(a,b)\to\mathbf{R}$ 是给定的函数, g 有界连续.

b) 利用 a) 中的结果计算过程 X_t 的 Green 函数 $G(x,y)$. 提示: 选择 $\phi=0$, 如例 9.3.6 一样计算.

9.14. 设 $D=(a,b)\subset(0,\infty)$ 是一个有界区间, 设

$$dX_t=rX_tdt+\alpha X_tdB_t,\quad X_0=x\in(a,b)$$

是一个几何布朗运动.

a) 利用推论 9.1.2 求

$$Q^x[X_{\tau_D}=b].$$

提示: 选择 $g=0$, 及 $\phi(a)=0$, $\phi(b)=1$.

b) 利用推论 9.1.2 计算

$$w(x)=E^x[\phi(X_{\tau_D})]+E^x\left[\int_0^{\tau_D}g(X_t)dt\right],$$

其中 $\phi:\{a,b\}\to\mathbf{R}$, $g:(a,b)\to\mathbf{R}$, 都为给定的函数且 g 连续有界. 提示: 用 $t=\ln x$, $w(x)=h(\ln x)$ 代入下面的微分方程

$$\frac{1}{2}\alpha^2x^2w''(x)+rxw'(x)=-g(x),\quad x>0$$

得到微分方程

$$\frac{1}{2}\alpha^2h''(t)+\left(r-\frac{1}{2}\alpha^2\right)h'(t)=-g(e^t),\quad t\in\mathbf{R}.$$

9.15*. a) 设 $D=(a,b)\subset\mathbf{R}$ 是有界区间, $X_t=B_t$ 是 1 维布朗运动. 利用推论 9.1.2 计算

$$h(x)=E^x[e^{-\rho\tau_D}\psi(B_{\tau_D})]+E^x\left[\theta\int_0^{\tau_D}e^{-\rho t}B_t^2dt\right],$$

其中 $\psi:\{a,b\}\to\mathbf{R}$ 为给定的函数, $\rho>0$, $\theta\in\mathbf{R}$ 都为常数. 提示: 考虑 Itô 扩散

$$dY_t=\begin{pmatrix}dY_t^{(1)}\\dY_t^{(2)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}dt\\dB_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}dt+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}dB_t;$$

$Y_0=y=(s,x)$.

那么 $h(x) = w(0, x)$. 这里

$$w(s,x) = w(y) = E^y[\phi(Y_{\tau_D})] + E^y\left[\int_0^{\tau_D} g(Y_t)dt\right],$$

其中 $\phi(y) = \phi(s,x) = e^{-\rho s}\psi(x)$, $g(y) = g(s,x) = \theta e^{-\rho s}x^2$. 注意

$$\begin{aligned}\tau_D =& \inf\{t > 0;\quad B_t \notin (a,b)\} = \inf\{t > 0;\quad Y_t^{(2)} \notin (a,b)\} \\ =& \inf\{t > 0;\quad Y_t \notin \mathbf{R} \times (a,b)\}.\end{aligned}$$

为了求边界值问题

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial w}{\partial s} = -\theta e^{-\rho s}x^2, & a < x < b, \\ w(s,a) = e^{-\rho s}\psi(a), & w(s,b) = e^{-\rho s}\psi(b) \end{cases}$$

的解 $w(s,x)$. 可用 $w(s,x) = e^{-\rho s}h(x)$ 去尝试.

b) 利用 a) 的方法去求 $E^x[e^{-\rho\tau_D}]$. 与练习 7.19 进行比较.

9.16. (Black-Scholes 方程) a) 设 $D = (0,T) \times (0,\infty) \subset \mathbf{R}^2$, 这里 $T > 0$ 为常数. 证明边界值问题

$$\begin{cases} -rw(s,x) + \dfrac{\partial w}{\partial s}(s,x) + rx\dfrac{\partial w}{\partial x}(s,x) + \dfrac{1}{2}\sigma^2 x^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}(s,x) = 0, & (s,x) \in D, \\ w(T,x) = (x-K)^+, \quad x \geqslant 0, \end{cases}$$

这里 $r > 0$, $\sigma \neq 0$ 都为常数. 在 $C^{1,2}(D) \cap C(\bar{D})$ 中的唯一解为

$$w(s,x) = E^{s,x}[e^{-r(T-s)}(X_{T-s} - K)^+], \tag{9.3.32}$$

这里 $X_t = X_t^x$ 是几何布朗运动

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dB_t, \quad X_0 = x > 0.$$

提示: 记 $u(s,x) = e^{-rs}w(s,x)$, 然后应用定理 9.2.13 和定理 9.1.1 于边界值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial s}(s,x) + rx\dfrac{\partial u}{\partial x}(s,x) + \dfrac{1}{2}\sigma^2 x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s,x) = 0, & (s,x) \in D, \\ \lim_{t\to\tau_D} u(Y_t) = e^{-r(s+\tau_D)}(X_{\tau_D} - K)^+, & x \geqslant 0, \end{cases}$$

这里 $Y_t = Y_t^{s,x} = (s+t, X_t^x), \tau_D = \inf\{t > 0;\quad Y_t \notin D\} = T - s$.

b) 利用 (9.3.32) 式证明:

$$w(0,x) = x\Phi\left(\eta + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(\eta - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}\right),$$

这里

$$\eta = \sigma^{-1}T^{-\frac{1}{2}}\left(\ln\frac{x}{K} + rT\right),$$

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{s^2}{2}}ds$$

是正态分布函数. 这就是著名的 Black-Scholes 期权定价公式. 见推论 12.3.8.

第 10 章 在最优停时方面的应用

10.1 时齐情形

导言中的问题 5 是下面问题的特殊情形:

问题 10.1.1 (最优停时问题) 设 X_t 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个 Itô 扩散, g 是给定的 $\mathbf{R}^n$ 上的 (报酬函数) 函数, 满足

a)

$$g(\xi) \geqslant 0, \quad \forall\, \xi \in \mathbf{R}^n; \tag{10.1.1}$$

b) g 是连续的.

求一个关于 X_t 的停时 $\tau^* = \tau^*(x,\omega)$(称为最优停时), 使得

$$E^x[g(X_{\tau^*})] = \sup_{\tau} E^x[g(X_\tau)], \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^n. \tag{10.1.2}$$

上确界是针对于 $\{X_t\}$ 的所有停时取的. 希望求得相应的最优期望报酬:

$$g^*(x) = E^x[g(X_{\tau^*})], \tag{10.1.3}$$

这里, 当 $\omega \in \Omega$, $\tau(\omega) = \infty$ 时, 设 $g(X_\tau) = 0$. 如通常一样, E^x 表示相对于在初始时刻 $X_0 = x \in \mathbf{R}^n$, 过程 X_t, $t \geqslant 0$ 的概率律 Q^x 的期望.

可以认为 X_t 是在 t 时刻某一对策的状态, 每个 ω 对应于对策的一个样本. 在每个时刻 t, 有停止该对策的期权, 从而得到报酬 $g(X_t)$, 或者继续该对策, 希望在将来某一时刻停止从而获得更大的报酬. 问题是现在并不知道该对策在将来的状态是什么, 仅知道它的概率分布. 用数学的观点来看, 这意味着所考虑的可能“停止”时间实际上就是定义 7.2.1 意义下的停时. 决定 $\tau \leqslant t$ 或 $\tau > t$, 仅依赖于布朗运动 B_r(驱动过程 X) 直到 t 时刻之前的表现, 也许仅依赖于 X_r 直到 t 时刻之前的表现. 因此, 在所有可能的停时 τ 中, 要求出最优的一个停时 τ^*, 它给出在“长期运行中”的最好的结果, 即 (10.1.2) 意义下的最大期望报酬.

下面将介绍如何利用上章的结果去求这个问题的解. 在本章的后面将会明白, 对问题 (10.1.2), (10.1.3) 的讨论也同时涵盖了以下明显更一般的问题:

$$g^*(s,x) = \sup_{\tau} E^{(s,x)}[g(s+\tau, X_\tau)] = E^{(s,x)}[g(s+\tau^*, X_{\tau^*})] \tag{10.1.4}$$

和

$$G^*(s,x)=\sup_{\tau} E^{(s,x)}\left[\int_0^{\tau} f(s+t,X_t)dt+g(s+\tau,X_\tau)\right]$$
$$=E^{(s,x)}\left[\int_0^{\tau^*} f(s+t,X_t)dt+g(s+\tau^*,X_{\tau^*})\right], \qquad (10.1.5)$$

这里 f 是给定的利润率 (报酬率) 函数 (满足确定条件).

另外将讨论把问题 (10.1.2) 和 (10.1.3) 延拓到 g 不必为连续或者 g 可能出现负值的情形.

关于 (10.1.2) 和 (10.1.3) 的解的一个基本概念如下:

定义 10.1.2 如果可测函数 $f:\mathbf{R}^n\to[0,\infty]$, 对任意的停时 τ 及任意的 $x\in\mathbf{R}^n$ 都有

$$f(x)\geqslant E^x[f(X_\tau)], \qquad (10.1.6)$$

则称 f 为 (相对于 X_t) 超均值函数.

另外, 如果 f 又是下半连续的, 那么 f 称为下半连续上调和的或简称上调和的 (相对于 X_t).

注意, 如果 $f:\mathbf{R}^n\to[0,\infty]$ 是下半连续的, 则对任意的停时序列 $\{\tau_k\}$, 当 $\tau_k\to 0$ 依概率 P 几乎必然地成立时, 由 Fatou 引理有

$$f(x)\leqslant E^x[\varliminf_{k\to\infty} f(X_{\tau_k})]\leqslant \varliminf_{k\to\infty} E^x[f(X_{\tau_k})]. \qquad (10.1.7)$$

把它与 (10.1.6) 结合起来, 当 f 是 (下半连续) 上调和的时, 对所有上述的停时序列 τ_k 有

$$f(x)=\lim_{k\to\infty} E^x[f(X_{\tau_k})], \quad \forall\, x. \qquad (10.1.8)$$

附注 1) 在文献 (Dynkin, 1965) 中, 可经常见到比 X_t 上调和更弱的一个概念, 它由超均值性质 (10.1.6) 加上随机连续性 (10.1.8) 来定义. 这个较弱的概念相应于第 9 章中定义的 X_t 调和性.

2) 如果 $f\in C^2(\mathbf{R}^n)$. 则由 Dynkin 公式可知, f 关于 X_t 是上调和的充要条件是

$$\mathcal{A}f\leqslant 0,$$

这里 $\mathcal{A}$ 是 X_t 的特征算子. 它经常是一个有用的准则 (见例 10.2.1).

3) 如果 $X_t=B_t$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的布朗运动, 那么关于 X_t 上调和的函数与经典势论中的 (非负) 上调和函数是一致的 (Doob, 1984; Port, Stone, 1979).

下面介绍上调和函数与超均值函数的一些有用的性质.

引理 10.1.3　a) 如果 f 是上调和的 (超均值的), $\alpha > 0$, 那么 αf 是上调和的 (超均值的).

b) 如果 f_1, f_2 都是上调和的 (超均值的), 那么 $f_1 + f_2$ 也是上调和的 (超均值的).

c) 如果 $\{f_j\}_{j\in J}$ 是超均值函数族, 那么 $f(x) := \inf_{j\in J}\{f_j(x)\}$, 当它可测时也是超均值函数 ($J$ 是任意集).

d) 如果 $f_1, f_2, \cdots$ 是上调和的 (超均值的) 函数, 且 $f_k \uparrow f$(点态收敛), 那么 f 是上调和的 (超均值的).

e) 如果 f 是超均值的且 $\sigma \leqslant \tau$ 是停时, 那么

$$E^x[f(X_\sigma)] \geqslant E^x[f(X_\tau)].$$

f) 如果 f 是超均值的, H 是一个 Borel 集, 那么 $\tilde{f}(x) := E^x[f(X_{\tau_H})]$ 是超均值的.

证明　a) 和 b) 是直接的.

c) 假定 f_j 是超均值的, $\forall\, j \in J$. 那么

$$f_j(x) \geqslant E^x[f_j(X_\tau)] \geqslant E^x[f(X_\tau)], \quad \forall\, j,$$

因此 $f(x) := \inf_{j\in J}\{f_j(x)\} \geqslant E^x[f(X_\tau)]$, 如所求.

d) 假定 f_j 是超均值的函数, 且 $f_j \uparrow f$. 那么

$$f(x) \geqslant f_j(x) \geqslant E^x[f_j(X_\tau)], \quad \forall j,$$

因此, 由控制收敛定理有

$$f(x) \geqslant \lim_{j\to\infty} E^x[f_j(X_\tau)] \geqslant E^x[f(X_\tau)],$$

故 f 是超均值的. 如果每个 f_j 也是下半连续的, 那么当 $k\to\infty$, $y_k \to x$ 时, 有

$$f_j(x) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} f_j(y_k) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} f(y_k), \quad \forall\, j,$$

令 $j\to\infty$, 有

$$f(x) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} f(y_k).$$

e) 如果 f 是超均值的, 由 Markov 性质, 当 $t > s$ 时有

$$E^x[f(X_t)|\mathcal{F}_s] = E^{X_s}[f(X_{t-s})] \leqslant f(X_s), \tag{10.1.9}$$

即过程 $\zeta_t = f(X_t)$ 相对于 $\{B_r;\ r \leqslant t\}$ 生成的 σ 代数 $\mathcal{F}_t$ 是一个上鞅 (附录 C). 因此, 由 Doob 停止定理 (Gihman, Skorohod, 1975, 第 11 页, 定理 6), 对任意的停时 σ, τ, 当 $\sigma \leqslant \tau$, a.s. Q^x, 有

$$E^x[f(X_\sigma)] \geqslant E^x[f(X_\tau)].$$

f) 假设 f 是超均值的, 由强 Markov 性 (7.2.2) 和公式 (7.2.6), 对任意的停时 α, 有

$$\begin{aligned} E^x[\tilde{f}(X_\alpha)] &= E^x[E^{X_\alpha}[f(X_{\tau_H})]] = E^x[E^x[\theta_\alpha f(X_{\tau_H})|\mathcal{F}_\alpha]] \\ &= E^x[\theta_\alpha f(X_{\tau_H})] = E^x[f(X_{\tau_H^\alpha})], \end{aligned} \tag{10.1.10}$$

这里 $\tau_H^\alpha = \inf\{t > \alpha;\ X_t \notin H\}$. 因为 $\tau_H^\alpha \geqslant \tau_H$, 由 e) 知有

$$E^x[\tilde{f}(X_\alpha)] \leqslant E^x[f(X_{\tau_H})] = \tilde{f}(x),$$

因此 $\tilde{f}$ 是超均值的.

下面的概念是基本的:

定义 10.1.4 设 h 是 $\mathbf{R}^n$ 上的实可测函数, 如果 f 是一个上调和的 (超均值的) 函数且 $f \geqslant h$, 称 f 是 h 的上调和 (超均值) 控制函数. 函数

$$\bar{h}(x) = \inf_f f(x), \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{10.1.11}$$

其下确界是对 h 的所有超均值控制函数 f 来取的. 称它为 h 的最小超均值控制函数.

类似地, 假定存在函数 $\hat{h}$ 使得

(i) $\hat{h}$ 是 h 的上调和控制函数;

(ii) 如果 f 是 h 的其他任意一个上调和控制函数, 则有 $\hat{h} \leqslant f$.

则称 $\hat{h}$ 为 h 的最小上调和控制函数.

注意, 由引理 10.1.3 c) 知函数 $\bar{h}$ 可测时, 它是超均值函数. 而且, 如果 $\bar{h}$ 是下半连续的, 则 $\hat{h}$ 存在且 $\hat{h} = \bar{h}$. 后面将证明, 如果 g 是非负的 (或下有界的) 且是下半连续的, 那么 $\hat{g}$ 存在且 $\hat{g} = \bar{g}$(定理 10.1.7).

设 $g \geqslant 0$, f 是 g 的超均值控制函数, 如果 τ 是一个停时, 那么有

$$f(x) \geqslant E^x[f(X_\tau)] \geqslant E^x[g(X_\tau)],$$

因此

$$f(x) \geqslant \sup_\tau E^x[g(X_\tau)] = g^*(x),$$

于是, 当 $\hat{g}$ 存在时, 恒有

$$\hat{g}(x) \geqslant g^*(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}^n. \tag{10.1.12}$$

那么它的相反的不等式是否成立呢? 也就是说, 上式是否为等式呢? 即

$$\hat{g} = g^*, \tag{10.1.13}$$

这个就不是那么容易看出来了. 在建立了关于计算 $\hat{g}$ 的一个有用的迭代过程之后再证明这点. 在此之前先介绍与上调和函数有关的一个概念.

定义 10.1.5 一个下半连续函数 $f: \mathbf{R}^n \to [0, \infty]$, 如果满足

$$f(x) \geqslant E^x[f(X_s)], \quad \forall\, s \geqslant 0, \ \ x \in \mathbf{R}^n, \tag{10.1.14}$$

则称它为 (相对于 X_t) 过分函数.

显然地, 一个上调和函数必定是过分函数. 它的逆命题也成立, 但不明显.

定理 10.1.6 设 $f: \mathbf{R}^n \to [0, \infty]$, 那么 f 是相对于 X_t 的过分函数的充要条件是 f 是相对于 X_t 的上调和函数.

证明 这里只对一个特殊情形给出证明, 一般情形的证明见文献 (Dynkin, 1965). 设 L 是 X 的微分算子 (由 (7.3.3) 式的右边给出), 因此, 在 C_0^2 上, L 与 X 的生成元 A 是一致的. 这里只对 $f \in C^2(\mathbf{R}^n)$ 且 Lf 是有界的这种特殊情形证明本定理. 由 Dynkin 公式可得

$$E^x[f(X_t)] = f(x) + E^x\left[\int_0^t Lf(X_r)dr\right], \quad \forall\, t \geqslant 0,$$

因此, 当 f 是过分函数时, 有 $Lf \leqslant 0$. 于是当 τ 是一个停时时, 有

$$E^x[f(X_{t\wedge\tau})] \leqslant f(x), \quad \forall\, t \geqslant 0.$$

令 $t \to \infty$, 可知 f 是上调和函数.

关于 g 的最小上调和控制函数 $\hat{g}$ 的第一个迭代过程如下:

定理 10.1.7 (最小上调和控制函数的构造) 设 $g = g_0$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的非负的下半连续函数, 归纳地定义

$$g_n(x) = \sup_{t \in S_n} E^x[g_{n-1}(X_t)], \tag{10.1.15}$$

这里 $S_n = \{k \cdot 2^{-n};\ 0 \leqslant k \leqslant 4^n\}$, $n = 1, 2, \cdots$. 那么 $g_n \uparrow \hat{g}$, 且 $\hat{g}$ 是 g 的最小上调和控制函数, 而且 $\hat{g} = \bar{g}$.

证明 注意 $\{g_n\}$ 是一个递增列, 定义 $\check{g}(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$. 那么

$$\check{g}(x) \geqslant g_n(x) \geqslant E^x[g_{n-1}(X_t)], \quad \forall\, n,\ \forall\, t \in S_n,$$

因此

$$\breve{g}(x) \geqslant \lim_{n\to\infty} E^x[g_{n-1}(X_t)] = E^x[\breve{g}(X_t)], \quad \forall\, t \in S = \cup_{n=1}^{\infty} S_n. \tag{10.1.16}$$

因为 $\breve{g}$ 是递增的下半连续函数序列的极限 (引理 8.1.4), 知 $\breve{g}$ 也是下半连续的. 固定 $t \in \mathbf{R}$, 选择 $t_k \in S$ 使得 $t_k \to t$. 那么由 (10.1.16), Fatou 引理及下半连续性知

$$\breve{g}(x) \geqslant \varliminf_{k\to\infty} E^x[\breve{g}(X_{t_k})] \geqslant E^x[\varliminf_{k\to\infty} \breve{g}(X_{t_k})] \geqslant E^x[\breve{g}(X_t)],$$

因此 $\breve{g}$ 是一个过分函数. 于是由定理 10.1.6 知, $\breve{g}$ 是上调和的, 因此 $\breve{g}$ 也是 g 的上调和控制函数. 另一方面, 如果 f 是 g 的任意的上调和控制函数, 那么由归纳法显然有

$$f(x) \geqslant g_n(x), \quad \forall\, n,$$

因此 $f(x) \geqslant \breve{g}(x)$. 于是 $\breve{g}$ 是 g 的最小超均值控制函数 $\bar{g}$. 因此 $\breve{g} = \hat{g}$.

由下面定理 10.1.7 的推论表明, 可把定理 10.1.7 中的有限集 S_n 换为整个区间 $[0, \infty]$.

推论 10.1.8 设 $h_0 = g$, 归纳地定义

$$h_n(x) = \sup_{t\geqslant 0} E^x[h_{n-1}(X_t)], \quad n = 1, 2, \cdots,$$

那么 $h_n \uparrow \hat{g}$.

证明 设 $h = \lim h_n$, 那么显然有 $h \geqslant \breve{g} = \hat{g}$. 另一方面, 因为 $\hat{g}$ 是过分函数, 有

$$\hat{g}(x) \geqslant \sup_{t\geqslant 0} E^x[\hat{g}(X_t)],$$

于是, 归纳可得

$$\hat{g} \geqslant h_n, \quad \forall\, n,$$

因此 $\hat{g} = h$.

现在准备关于最优停时问题的第一个重要结果, 下面的结果主要归功于 Dynkin (1963).

定理 10.1.9 (最优停时存在定理) 设 g^* 表示最优报酬. $\hat{g}$ 表示连续报酬函数 g 的最小上调和控制函数.

a) 则

$$g^*(x) = \hat{g}(x). \tag{10.1.17}$$

b) 对 $\varepsilon > 0$, 记

$$D_\varepsilon = \{x;\ g(x) < \hat{g}(x) - \varepsilon\}. \tag{10.1.18}$$

假定 g 是有界的, 那么在 D_ε 的首次逸出时 τ_ε 停止是接近于最优的, 即

$$|g^*(x) - E^x[g(X_{\tau_\varepsilon})]| \leqslant 2\varepsilon, \quad \forall\ x. \tag{10.1.19}$$

c) 对任意的连续函数 $g \geqslant 0$, 记

$$D = \{x;\ g(x) < g^*(x)\} \quad (\text{连续域}). \tag{10.1.20}$$

对 $N = 1, 2, \cdots$, 定义 $g_N = g \wedge N$, $D_N = \{x;\ g_N(x) < \widehat{g_N}(x)\}$, $\sigma_N = \tau_{D_N}$. 那么 $D_N \subset D_{N+1}$, $D_N \subset D \cap g^{-1}([0, N))$, $D = \cup_N D_N$. 如果对任意的 $N, \sigma_N < \infty$ 相对于 Q^x 几乎必然成立, 那么

$$g^*(x) = \lim_{N\to\infty} E^x[g(X_{\sigma_N})]. \tag{10.1.21}$$

d) 特别, 如果 $\tau_D < \infty$ 相对于 Q^x 几乎必然成立, 且 $\{g(X_{\sigma_N})\}_N$ 关于 Q^x 是一致可积的 (附录 C), 那么

$$g^*(x) = E^x[g(X_{\tau_D})]$$

且 $\tau^* = \tau_D$ 是一个最优停时.

证明 首先假定 g 是有界的, 定义

$$\tilde{g}_\varepsilon(x) = E^x[\hat{g}(X_{\tau_\varepsilon})], \quad \varepsilon > 0, \tag{10.1.22}$$

那么由引理 10.1.3 f) 知 $\tilde{g}_\varepsilon$ 是超均值函数. 要求有

$$g(x) \leqslant \tilde{g}_\varepsilon(x) + \varepsilon, \quad \forall\ x. \tag{10.1.23}$$

为了做到这一点, 假定

$$\beta := \sup_x\{g(x) - \tilde{g}_\varepsilon(x)\} > \varepsilon, \tag{10.1.24}$$

那么对任意的 $\eta > 0$, 可找到 x_0 使得

$$g(x_0) - \tilde{g}_\varepsilon(x_0) \geqslant \beta - \eta. \tag{10.1.25}$$

另一方面, 因为 $\tilde{g}_\varepsilon + \beta$ 是 g 的一个超均值控制函数, 有

$$\hat{g}(x_0) \leqslant \tilde{g}_\varepsilon(x_0) + \beta. \tag{10.1.26}$$

结合 (10.1.25) 和 (10.1.26), 得到

$$\hat{g}(x_0) \leqslant g(x_0) + \eta. \tag{10.1.27}$$

考虑下面两种可能的情形:

情形 1. $\tau_\varepsilon > 0$, a.s. Q^{x_0}. 那么由 (10.1.27) 及 D_ε 的定义, 有

$$g(x_0) + \eta \geqslant E^{x_0}[\hat{g}(X_{t\wedge\tau_\varepsilon})] \geqslant E^{x_0}[(g(X_t) + \varepsilon)\mathcal{X}_{\{t<\tau_\varepsilon\}}], \quad \forall\, t > 0,$$

因此由 Fatou 引理和 g 的连续性可得

$$\begin{aligned} g(x_0) + \eta &\geqslant \varliminf_{t\to 0} E^{x_0}[(g(X_t) + \varepsilon)\mathcal{X}_{\{t<\tau_\varepsilon\}}] \\ &\geqslant E^{x_0}[\varliminf_{t\to 0}(g(X_t) + \varepsilon)\mathcal{X}_{\{t<\tau_\varepsilon\}}] \geqslant g(x_0) + \varepsilon. \end{aligned}$$

如果 $\eta < \varepsilon$, 则这是矛盾的.

情形 2. $\tau_\varepsilon = 0$, a.s. Q^{x_0}. 那么 $\tilde{g}_\varepsilon(x_0) = \hat{g}(x_0)$, 因此 $g(x_0 \leqslant \tilde{g}_\varepsilon(x_0)$, 当 $\eta < \beta$ 时, 它与 (10.1.25) 矛盾.

于是 (10.1.24) 导出了一个矛盾, 故此 (10.1.23) 成立, 由此可得出 $\tilde{g}_\varepsilon + \varepsilon$ 是 g 的一个超均值控制函数. 因此有

$$\hat{g} \leqslant \tilde{g}_\varepsilon + \varepsilon = E[\hat{g}(X_{\tau_\varepsilon})] + \varepsilon \leqslant E[(g+\varepsilon)(X_{\tau_\varepsilon})] + \varepsilon \leqslant g^* + 2\varepsilon, \tag{10.1.28}$$

由 ε 的任意性及 (10.1.12), 有

$$\hat{g} = g^*,$$

如果 g 不是有界的, 可设

$$g_N = \min\{N, g\}, \quad N = 1, 2, \cdots.$$

如前一样, 设 $\widehat{g_N}$ 是 g_N 的最小上调和控制函数, 那么

$$g^* \geqslant g_N^* = \widehat{g_N} \uparrow h, \quad 当\ N \to \infty\ 时, 这里\ h \geqslant \hat{g}.$$

因为 h 是 g 的一个上调和控制函数. 故此 $h = \hat{g} = g^*$. 这样对一般的 g 证明了 (10.1.17). 由 (10.1.28) 和 (10.1.17) 可得到 (10.1.19).

最后, 为了得到 c) 和 d), 再先假定 g 是有界的, 那么, 由于 $\varepsilon \to 0$ 时, 有 $\tau_\varepsilon \uparrow \tau_D$, 及 $\tau_D < \infty$, a.s., 有

$$E^x[g(X_{\tau_\varepsilon})] \to E^x[g(X_{\tau_D})], \quad 当\ \varepsilon \downarrow 0\ 时, \tag{10.1.29}$$

因此, 由 (10.1.28) 和 (10.1.17) 可得

$$g^*(x) = E^x[g(X_{\tau_D})], \quad 当\ g\ 有界时. \tag{10.1.30}$$

如果 g 不是有界的, 定义

$$h = \lim_{N\to\infty} \widehat{g_N},$$

那么, 由引理 (10.1.3 d) 知 h 是上调和的. 由于对任意的 N, $\widehat{g_N} \leqslant \hat{g}$, 有 $h \leqslant \hat{g}$. 另一方面, 对任意的 N, $g_N \leqslant \widehat{g_N} \leqslant h$, 因此 $g \leqslant h$, 又 $\hat{g}$ 是 g 的最小上调和控制函数, 故可得出

$$h = \hat{g}. \tag{10.1.31}$$

因此, 由 (10.1.30), (10.1.31) 得到 (10.1.21):

$$g^*(x) = \lim_{N\to\infty} \widehat{g_N}(x) = \lim_{N\to\infty} E^x[g_N(X_{\sigma_N})] \leqslant \lim_{N\to\infty} E^x[g(X_{\sigma_N})] \leqslant g^*(x).$$

注意恒有 $\widehat{g_N} \leqslant N$, 如果有 $g_N(x) < \widehat{g_N}(x)$, 那么 $g_N(x) < N$. 因此 $g(x) = g_N(x) < \widehat{g_N}(x) \leqslant \hat{g}(x)$, 且 $g_{N+1}(x) = g_N(x) < \widehat{g_N}(x) \leqslant \widehat{g_{N+1}}(x)$. 于是对任意的 N, $D_N \subset D \cap \{x;\ g(x) < N\}$, 且 $D_N \subset D_{N+1}$, 故此由 (10.1.31) 可得到 D 是单调增列 D_N 的并. $N = 1, 2, \cdots$, 由此

$$\tau_D = \lim_{N\to\infty} \sigma_N.$$

由 (10.1.21) 和一致可积性, 得到

$$\begin{aligned}\hat{g}(x) &= \lim_{N\to\infty} \widehat{g_N}(x) = \lim_{N\to\infty} E^x[g_N(X_{\sigma_N})] \\ &= E^x[\lim_{N\to\infty} g_N(X_{\sigma_N})] = E^x[g(X_{\tau_D})],\end{aligned}$$

定理 10.1.9 得证.

附注　1) 由于 $\hat{g} = g^*$ 是下半连续的, g 是连续的, 故 D, D_ε 和 D_N 都为开集.

2) 由 a) 的证明可知, 在 $g \geqslant 0$ 及 g 是下半连续的这个较弱的假定下, (10.1.17) 仍然成立.

定理 10.1.9 的下面的推论经常被用到.

推论 10.1.10　假定存在一个 Borel 集 H 使得

$$\tilde{g}_H(x) := E^x[g(X_{\tau_H})]$$

是 g 的一个超均值控制函数. 那么

$$g^*(x) = \tilde{g}_H(x),$$

因此 $\tau^* = \tau_H$ 是最优的.

证明　如果 $\tilde{g}_H$ 是 g 的一个超均值控制函数, 显然有

$$\bar{g}(x) \leqslant \tilde{g}_H(x).$$

另一方面, 有

$$\tilde{g}_H(x) \leqslant \sup_\tau E^x[g(X_\tau)] = g^*(x),$$

因此, 由定理 10.1.7 和定理 10.1.9 a), 有 $g^* = \tilde{g}_H$.

推论 10.1.11 设 $D = \{x;\ g(x) < \hat{g}(x)\}$ 及记

$$\tilde{g}(x) = \tilde{g}_D(x) = E^x[g(X_{\tau_D})],$$

如果 $\tilde{g} \geqslant g$, 那么 $\tilde{g} = g^*$.

证明 因为 $X_{\tau_D} \notin D$, 有 $g(X_{\tau_D}) \geqslant \hat{g}(X_{\tau_D})$. 因此 $g(X_{\tau_D}) = \hat{g}(X_{\tau_D})$ a.s. Q^x. 因为 $\hat{g}$ 是超均值函数, 于是, $\tilde{g}(x) = E^x[\hat{g}(X_{\tau_D})]$ 也是超均值函数, 由推论 10.1.10 可得出结论.

定理 10.1.9 给出了最优停时 τ^* 存在的一个充分条件. 但不幸的是, τ^* 一般不一定存在. 例如, 如果

$$X_t = t, \quad t \geqslant 0\ (\text{确定性的})$$

和

$$g(\xi) = \frac{\xi^2}{1+\xi^2}, \quad \xi \in \mathbf{R},$$

那么 $g^*(x) = 1$, 但不存在停时 τ 使得

$$E^x[g(X_\tau)] = 1.$$

然而, 能证明如果最优停时 τ^* 存在, 那么由定理 10.1.9 给出的停时是最优的.

定理 10.1.12 (最优停时的唯一性定理) 假设问题 (10.1.2) 对任意的 x 存在一个最优停时 $\tau^* = \tau^*(x,\omega)$, 如前定义

$$D = \{x;\ g(x) < g^*(x)\} \subset \mathbf{R}^n,$$

那么

$$\tau^* \geqslant \tau_D, \quad \forall\, x \in D \tag{10.1.32}$$

且

$$g^*(x) = E^x[g(X_{\tau_D})], \quad \forall\, x \in \mathbf{R}^n, \tag{10.1.33}$$

因此 τ_D 是问题 (10.1.2) 的一个最优停时.

证明 选择 $x \in D$, 设 τ 是一个 $\mathcal{F}_t$ 停时, 且假定 $Q^x[\tau < \tau_D] > 0$. 如果 $\tau < \tau_D$, 则 $g(X_\tau) < g^*(X_\tau)$, 又恒有 $g \leqslant g^*$, 可得

$$\begin{aligned} E^x[g(X_\tau)] &= \int_{\tau<\tau_D} g(X_\tau)dQ^x + \int_{\tau\geqslant\tau_D} g(X_\tau)dQ^x \\ &< \int_{\tau<\tau_D} g^*(X_\tau)dQ^x + \int_{\tau\geqslant\tau_D} g^*(X_\tau)dQ^x = E^x[g^*(X_\tau)] \leqslant g^*(x) \end{aligned}$$

(因为 g^* 是上调和的), 这证明了 (10.1.32).

为证明 (10.1.33), 选择 $x \in D$. 因为 $\hat{g}$ 是上调和的, 由 (10.1.32) 和引理 10.1.3 e), 有

$$\begin{aligned} g^*(x) &= E^x[g(X_{\tau^*})] \leqslant E^x[\hat{g}(X_{\tau^*})] \leqslant E^x[\hat{g}(X_{\tau_D})] \\ &= E^x[g(X_{\tau_D})] \leqslant g^*(x), \end{aligned}$$

这样对 $x \in D$ 证明了 (10.1.33) 式. 然后选择 $x \in \partial D$, 且为 D 的非正则边界点, 那么 $\tau_D > 0$ a.s. Q^x. 设 $\{\alpha_k\}$ 是一个停时序列, 使得 $0 < \alpha_k < \alpha_D$, 且当 $k \to \infty$ 时, $\alpha_k \to 0$ a.s. Q^x. 那么 $X_{\alpha_k} \in D$, 如此由 (10.1.32), (7.2.6) 和强 Markov 性 (7.2.2) 有

$$E^x[g(X_{\tau_D})] = E^x[\theta_{\alpha_k} g(X_{\tau_D})] = E^x[E^{X_{\alpha_k}}[g(X_{\tau_D})]] = E^x[g^*(X_{\alpha_k})], \quad \forall\, k,$$

因此, 由下半连续性和 Fatou 引理可得

$$g^*(x) \leqslant E^x[\varliminf_{k \to \infty} g^*(X_{\alpha_k})] \leqslant \varliminf_{k \to \infty} E^x[g^*(X_{\alpha_k})] = E^x[g(X_{\tau_D})],$$

最后, 如果 $x \in \partial D$ 是 D 的正则边界点, 或 $x \notin \bar{D}$, 有 $\tau_D = 0$, a.s. Q^x. 因此 $g^*(x) = E^x[g(X_{\tau_D})]$.

附注 记 $\mathcal{A}$ 是 X 的特征算子, 假设 $g \in C^2(\mathbf{R}^n)$. 定义

$$U = \{x;\ \mathcal{A}g(x) > 0\}, \tag{10.1.34}$$

D 如前 (10.1.20) 一样, 那么

$$U \subset D. \tag{10.1.35}$$

从 (10.1.32) 可推得在它逸出 U 之前, 停止该过程永远不会是最优的. 但是, 当 $U \neq D$ 时, 可能会有这种情况出现: 过程超出 U 之后再停止是最优的 (事实上它是典型的情形), 见例 10.2.2.

为证明 (10.1.35), 选择 $x \in U$, 有界开集 $W \subset U$, 且 $x \in W$. 记 τ_0 是首次从有界开集 W 的边界逸出的时间. 那么由 Dynkin 公式, 对 $u > 0$, 有

$$E^x[g(X_{\tau_0 \wedge u})] = g(x) + E^x\left[\int_0^{\tau_0 \wedge u} \mathcal{A}g(X_s)ds\right] > g(x),$$

因此 $g(x) < g^*(x)$, 故有 $x \in D$.

例 10.1.13 设 $X_t = B_t$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的布朗运动, 利用 B_t 在 $\mathbf{R}^2$ 中有返回的性质 (例 7.4.2), 可证明在 $\mathbf{R}^2$ 中 (非负) 的上调和函数是常数 (练习 10.2). 因此

$$g^*(x) = \|g\|_\infty := \sup\{g(y);\ y \in \mathbf{R}^2\}, \quad \forall\, x,$$

当 g 无界时, 有 $g^* = \infty$, 则没有最优的停时. 故假定 g 是有界的, 它的连续域为

$$D = \{x;\ g(x) < \|g\|_\infty\}.$$

当 ∂D 是一个极集时, 即 $\mathrm{cap}(\partial D) = 0$, 这里 cap 表示对数容量 (Por, Stone, 1979). 那么 $\tau_D = \infty$ a.s., 不存在最优的停时. 另一方面, 如果 $\mathrm{cap}(\partial D) > 0$, 那么 $\tau_D < \infty$ a.s., 且有

$$E^x[g(B_{\tau_D})] = \|g\|_\infty = g^*(x),$$

故此 $\tau^* = \tau_D$ 是最优停时.

例 10.1.14 在 $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 3$ 中情形与上例是有差异的.

a) 为了说明这点, 设 $X_t = B_t$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的布朗运动. 报酬函数为

$$g(\xi) = \begin{cases} |\xi|^{-1}, & |\xi| \geqslant 1, \\ 1, & |\xi| < 1, \end{cases} \qquad \xi \in \mathbf{R}^3,$$

那么在 $\mathbf{R}^3$ 中, g 是上调和的 (经典意义下), 因此 $g^* = g$ 恒成立. 故此不论初始点在哪, 最优策略都是马上停止.

b) 把 g 换为

$$h(x) = \begin{cases} |x|^{-\alpha}, & |x| \geqslant 1, \\ 1, & |x| < 1, \end{cases}$$

其中常数 $\alpha > 1$, 记 $H = \{x;\ |x| > 1\}$, 定义

$$\tilde{h}(x) = E^x[h(B_{\tau_H})] = P^x[\tau_H < \infty],$$

由例 7.4.2 知

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ |x|^{-1}, & |x| > 1, \end{cases}$$

即 $\tilde{h} = g$(在 a) 中定义的, 它是 h 的上调和控制函数. 故由推论 10.1.10 知

$$h^* = \tilde{h} = g,$$

$H = D$, 且 $\tau^* = \tau_H$ 是最优停时.

假定报酬函数可取负值 对问题 (10.1.2) 和 (10.1.3) 所获得的结论都是基于假设 (10.1.1). 虽然这些假设不能完全去掉, 但在一定程度上可适当放松. 例如, 定理 10.1.9 a) 中在 $g \geqslant 0$ 的前提下, 只需假定 g 是下半连续的即可.

g 的非负性假设也能被放松, 首要的一点是, 如果 g 是下有界的, 即 $g \geqslant -M$. 其中 $M > 0$ 为常数, 那么可设

$$g_1 = g + M \geqslant 0,$$

然后应用前面的理论于 g_1. 如果 $\tau < \infty$ a.s., 那么

$$E^x[g(X_\tau)] = E^x[g_1(X_\tau)] - M,$$

有 $g^*(x) = g_1^*(x) - M$. 因此该问题可归约为对非负函数 g_1 的最优停时问题 (见练习 10.4).

如果 g 不是下有界的, 那么问题 (10.1.2) 和 (10.1.3) 就不大好定义了, 除非有

$$E^x[g^-(X_\tau)] < \infty, \quad \forall \tau, \tag{10.1.36}$$

这里

$$g^-(x) = -\min(g(x),\ 0).$$

如果假定 g 满足较强的条件:

$$\text{族 } \{g^-(X_\tau);\ \tau \text{ 为停时}\} \text{ 是一致可积的}, \tag{10.1.37}$$

那么基本上由非负性情形得出的所有理论都可照般过来. 要想知道更多的信息, 读者可参考文献 (Shiryaev, 1978), 也可见定理 10.4.1.

10.2 非时齐的情形

现在考虑报酬函数 g 既依赖于空间又依赖于时间的情形, 即

$$g = g(t,x):\ \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to [0,\infty), \quad g \text{ 是连续的}. \tag{10.2.1}$$

问题是求 $g_0(x)$ 和 τ^* 使得

$$g_0(x) = \sup_\tau E^x[g(\tau, X_\tau)] = E^x[g(\tau^*, X_{\tau^*})], \tag{10.2.2}$$

为了把它归约到原问题 (10.1.2) 和 (10.1.3), 方法如下:

假定 Itô 扩散 $X_t = X_t^x$ 有形式:

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad t \geqslant 0,\ X_0 = x,$$

这里 $b:\ \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $\sigma:\ \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n\times m}$ 是给定的函数, 且满足定理 5.2.1 的条件. B_t 是 m 维布朗运动, 在 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中定义 Itô 扩散 $Y_t = Y_t^{(s,x)}$:

$$Y_t = \begin{pmatrix} s+t \\ X_t^x \end{pmatrix}, \quad t \geqslant 0, \tag{10.2.3}$$

那么

$$dY_t = \begin{pmatrix} 1 \\ b(X_t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma(X_t) \end{pmatrix} dB_t = \hat{b}(Y_t)dt + \hat{\sigma}(Y_t)dB_t, \tag{10.2.4}$$

这里

$$\hat{b}(\eta) = \hat{b}(t,\xi) = \begin{pmatrix} 1 \\ b(\xi) \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n+1}, \quad \hat{\sigma}(\eta) = \hat{\sigma}(t,\xi) = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 \\ ---- \\ \sigma(\xi) \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{(n+1)\times m},$$

其中, $\eta = (t,\xi) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$.

因此 Y_t 是一个 Itô 扩散, 初始点为 $y = (s,x)$. 记 $R^y = R^{s,x}$ 表示 $\{Y_t\}$ 的概率律, $E^y = E^{(s,x)}$ 表示相对于 R^y 的期望. 根据 Y_t, 问题 (10.2.2) 能被写成

$$g_0(x) = g^*(0,x) = \sup_\tau E^{(0,x)}[g(Y_\tau)] = E^{(0,x)}[g(Y_{\tau^*})], \tag{10.2.5}$$

它是问题

$$g^*(s,x) = \sup_\tau E^{(s,x)}[g(Y_\tau)] = E^{(s,x)}[g(Y_{\tau^*})] \tag{10.2.6}$$

的特殊情形. 而 (10.2.6) 具有 (10.1.2), (10.1.3) 的形式. 其中用 Y_t 代替了 X_t.

注意到 Y_t 的特征算子 $\hat{\mathcal{A}}$ 为

$$\hat{\mathcal{A}}\phi(s,x) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(s,x) + \mathcal{A}\phi(s,x), \quad \phi \in C^2(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n), \tag{10.2.7}$$

这里 $\mathcal{A}$ 是 X_t 的特征算子 (作用于变量 x).

例 10.2.1 设 $X_t = B_t$ 是 1 维布朗运动, 报酬函数为

$$g(t,\xi) = e^{-\alpha t + \beta \xi}, \quad \xi \in \mathbf{R},$$

这里 α, $\beta \geqslant 0$ 为常数. $Y_t^{s,x} = \begin{pmatrix} s+t \\ B_t^x \end{pmatrix}$ 的特征算子 $\hat{\mathcal{A}}$ 的形式为

$$\hat{\mathcal{A}}f(s,x) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f \in C^2,$$

因此

$$\hat{\mathcal{A}}g = \left(-\alpha + \frac{1}{2}\beta^2\right)g,$$

故当 $\beta^2 \leqslant 2\alpha$, 那么 $g^* = g$. 最优策略是马上停止. 如果 $\beta^2 > 2\alpha$, 有

$$U := \{(s,x);\ \hat{\mathcal{A}}g(s,x) > 0\} = \mathbf{R}^2,$$

因此由 (10.1.35) 知 $D=\mathbf{R}^2$, 故 τ^* 不存在. 并且可利用定理 (10.1.7) 证明 $g^*=\infty$:

$$\begin{aligned}\sup_{t\in S_n} E^{(s,x)}[g(Y_t)] &= \sup_{t\in S_n} E[e^{-\alpha(s+t)+\beta B_t^x}]\\ &= \sup_{t\in S_n}[e^{-\alpha(s+t)}\cdot e^{\beta x+\frac{1}{2}\beta^2 t}]\\ &= g(s,x)\exp\left(\left(-\alpha+\frac{1}{2}\beta^2\right)2^n\right),\end{aligned}$$

故此, 当 $n\to\infty$ 时, $g_n(x)\to\infty$. 此时最优停时不存在.

例 10.2.2 (何时卖股票最好 (第 1 部分)) 现在回到导言中问题 5 的一个特殊情形. 假设在 t 时刻某人的资产 (如房屋, 股票, 石油, $\cdots$) 价格 X_t 按如下的随机微分方程变化:

$$dX_t = rX_t dt + \alpha X_t dB_t, \quad X_0 = x > 0,$$

这里 B_t 是 1 维布朗运动, r,α 是已知的常数 (至于从一系统观测值去估计 α 和 r 的问题, 可利用过程 $\{X_t\}$ 的平方变差 $\langle X,X\rangle_t$(练习 4.7) 和滤波理论 (例 6.2.11) 而获得). 假定卖资产时要交一个固定的费/税或交易成本 $a>0$. 那么如果他在时刻 t 决定卖资产时, 它的净折现值为

$$e^{-\rho t}(X_t - a),$$

这里 $\rho>0$ 是给定的折现因子. 问题是求一个停时 τ 最大化

$$E^{(s,x)}[e^{-\rho t}(X_t - a)] = E^{(s,x)}[g(\tau, X_\tau)],$$

这里

$$g(t,\xi) = e^{-\rho t}(\xi - a).$$

过程 $Y_t=(s+t,X_t)$ 的特征算子 $\hat{A}$ 如下

$$\hat{A}f(s,x) = \frac{\partial f}{\partial t} + rx\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad f\in C^2(\mathbf{R}^2).$$

于是 $\hat{A}f(s,x) = -\rho e^{-\rho s}(x-a) + rxe^{-\rho s} = e^{-\rho s}((r-\rho)x+\rho a)$. 故此

$$U := \{(s,x); \hat{A}g(s,x)>0\} = \begin{cases}\mathbf{R}\times\mathbf{R}_+, & \text{如果 } r\geqslant\rho,\\ \left\{(s,x); x<\dfrac{a\rho}{\rho-r}\right\}, & \text{如果 } r<\rho,\end{cases}$$

因此, 当 $r\geqslant\rho$ 时, 有 $U=D=\mathbf{R}\times\mathbf{R}_+$, 故 τ^* 不存在. 如果 $r>\rho$, 那么 $g^*=\infty$. 然而, 如果 $r=\rho$, 那么

$$g^*(s,x) = xe^{-\rho s}$$

(它的证明留作练习 10.5)

余下只需看 $r < \rho$ 的情形 (如果把 ρ 看作利率、通胀和税等之和. 这在应用上并非是不合理的假定). 首先得到区域 D 关于 t 一定是不变的. 即

$$D + (t_0, 0) = D, \quad \forall\, t_0. \tag{10.2.8}$$

为了证明 (10.2.8). 考虑

$$\begin{aligned} &D + (t_0, 0) = \{(t + t_0, x);\ (t, x) \in D\} = \{(s, x);\ (s - t_0, x) \in D\} \\ &= \{(s, x);\ g(s - t_0, x) < g^*(s - t_0, x)\} = \{(s, x);\ e^{\rho t_0} g(s, x) < e^{\rho t_0} g^*(s, x)\} \\ &= \{(s, x);\ g(s, x) < g^*(s, x)\} = D, \end{aligned}$$

这里利用了

$$\begin{aligned} g^*(s - t_0, x) &= \sup_\tau E^{(s - t_0, x)}[e^{-\rho\tau}(X_\tau - a)] = \sup_\tau E[e^{-\rho(\tau + (s - t_0))}(X_\tau^x - a)] \\ &= e^{\rho t_0} \sup_\tau E[e^{-\rho(\tau + s)}(X_\tau^x - a)] = e^{\rho t_0} g^*(s, x), \end{aligned}$$

因此 D 中包含 U 的连通部分必有如下形式:

$$D(x_0) = \{(t, x);\ 0 < x < x_0\},\ 对某个\ x_0 \geqslant \frac{a\rho}{\rho - r}.$$

注意 D 不能有其它的组成部分. 比如 V 是 D 的一个与 U 不相交的构成部分, 那么在 V 中 $\hat{A}g < 0$, 因此当 $y \in V$ 时, 对任意的逸出时 τ, 其中 τ 不超过 V 中的一个 x 有界的带型域的逸出时, 有

$$E^y[g(Y_\tau)] = g(y) + E^y\left[\int_0^\tau \hat{A}g(Y_t)dt\right] < g(y),$$

由定理 10.1.9 c) 可知 $g^*(y) = g(y)$, 由此知 $V = \varnothing$.

记 $\tau(x_0) = \tau_{D(x_0)}$, 计算:

$$\tilde{g}(s, x) = \tilde{g}_{x_0}(s, x) = E^{(s,x)}[g(Y_{\tau(x_0)})]. \tag{10.2.9}$$

从第 9 章知, $f = \tilde{g}$ 是边界值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial s} + rx\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\alpha^2 x^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < x_0, \\ f(s, x_0) = e^{-\rho s}(x_0 - a) \end{cases} \tag{10.2.10}$$

的 (有界) 解 (注意 $\mathbf{R} \times \{0\}$ 不包含 D 的相对于 $Y_t = (s + t, X_t)$ 的任何正则边界点).

如果尝试 (10.2.10) 的解具有如下形式

$$f(s,x)=e^{-\rho s}\phi(x),$$

则可得到下面的 1 维问题

$$\begin{cases} -\rho\phi+rx\phi'(x)+\dfrac{1}{2}\alpha^2x^2\phi''(x)=0, & 0<x<x_0, \\ \phi(x_0)=x_0-a, \end{cases} \tag{10.2.11}$$

它的通解为

$$\phi(x)=C_1x^{\gamma_1}+C_2x^{\gamma_2},$$

这里 C_1, C_2 为常数.

$$\gamma_i=\alpha^{-2}\left[\frac{1}{2}\alpha^2-r\pm\sqrt{(r-\frac{1}{2}\alpha^2)^2+2\rho\alpha^2}\right],\quad i=1,2,\ \gamma_2<0<\gamma_1,$$

因为 $\phi(x)$ 是有界的, 当 $x\to 0$ 时, 必有 $C_2=0$. 由边界条件 $\phi(x_0)=x_0-a$, 可求得 $C_1=x_0^{-\gamma_1}(x_0-a)$. 由此得到 (10.2.10) 的有界解为

$$\tilde{g}_{x_0}(s,x)=f(s,x)=e^{-\rho s}(x_0-a)\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\gamma_1}. \tag{10.2.12}$$

如果固定 (s,x), 则使 $\tilde{g}_{x_0}$ 的值最大的 x_0 为

$$x_0=x_{\max}=\frac{a\gamma_1}{\gamma_1-1}. \tag{10.2.13}$$

注意, 当且仅当 $r<\rho$ 时, $\gamma_1>1$.

因此得到了 $g^*(s,x)=\sup_\tau E^{(s,x)}[e^{-\rho\tau}(X_\tau-a)]$ 的一个候选者 $\tilde{g}_{\max}(s,x)$. 为了证明真正地有 $\tilde{g}_{\max}=g^*$, 只需证明 $\tilde{g}_{\max}$ 是 g 的超均值控制函数 (见推论 10.1.10), 这可以证明, 但在这里不给出详细的证明. 因为这个问题能由定理 10.4.1 更容易解决 (见例 10.4.2).

于是, 结论是当资产价格首次达到值 $x_{\max}=\dfrac{a\gamma_1}{\gamma_1-1}$ 时, 持有者应当卖掉该资产. 该策略下所获得的期望折现利润是

$$g^*(s,x)=\tilde{g}_{\max}(s,x)=e^{-\rho s}\left(\frac{\gamma_1-1}{a}\right)^{\gamma_1-1}\left(\frac{x}{\gamma_1}\right)^{\gamma_1}.$$

附注 读者可检验 $x_0=x_{\max}$ 是使函数

$$x\to\tilde{g}_{x_0}(s,x)\quad(\text{由 (10.2.9) 给出})$$

在 x_0 点连续可微的唯一值. 它不是偶然的重合. 事实上, 它说明了一个普遍现象, 即高度相切 (即光滑通过) 原理 (Samuelson, 1965; Mckean, 1965; Bather, 1970; Shiryaev, 1978). 这个原理是联系最优停时与变分不等式的基础. 在本章的后面, 将讨论这些联系的某些方面. 更多的知识可参考文献 (Bensoussan, Lions, 1978; Friedman, 1976; Brekke, Øksendal, 1991).

10.3 含积分的最优停时问题

设

$$dY_t = b(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dB_t, \quad Y_0 = y \tag{10.3.1}$$

是 $\mathbf{R}^k$ 中的 Itô 扩散. $g : \mathbf{R}^k \to [0,\infty)$ 是连续的. $f : \mathbf{R}^k \to [0,\infty)$ 是 Lipschitz 连续的且满足线性增长条件 (这些条件可被放松, 见 (10.1.37) 和定理 10.4.1). 考虑最优停时问题: 求 $\Phi(y)$ 和 τ^* 使得

$$\Phi(y) = \sup_\tau E^y\left[\int_0^\tau f(Y_t)dt + g(Y_\tau)\right] = E^y\left[\int_0^{\tau^*} f(Y_t)dt + g(Y_{\tau^*})\right], \tag{10.3.2}$$

这个问题可通过如下的过程归约到原问题 (10.1.2) 和 (10.1.3): 在 $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^{k+1}$ 中, 定义 Itô 扩散

$$dZ_t = \begin{pmatrix} dY_t \\ dW_t \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} b(Y_t) \\ f(Y_t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma(Y_t) \\ 0 \end{pmatrix} dB_t, \quad Z_0 = z = (y, w). \tag{10.3.3}$$

那么有

$$\Phi(y) = \sup_\tau E^{(y,0)}[W_\tau + g(Y_\tau)] = \sup_\tau E^{(y,0)}[\tilde{g}(Z_\tau)],$$

这里

$$\tilde{g}(z) := \tilde{g}(y,w) := g(y) + w, \quad z = (y,w) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}, \tag{10.3.4}$$

这样又回到了 (10.1.2), (10.1.3) 型问题, 其中 Z_t 替代 X_t, $\tilde{g}$ 取代 g 的位置. 注意 Y_t 的特征算子 $\mathcal{A}_Y$ 与 Z_t 的特征算子 $\mathcal{A}_Z$ 的关系如下

$$\mathcal{A}_Z\phi(z) = \mathcal{A}_Z\phi(y,w) = \mathcal{A}_Y\phi(y,w) + f(y)\frac{\partial\phi}{\partial w}, \quad \phi \in C^2(\mathbf{R}^{k+1}), \tag{10.3.5}$$

特别, 如果 $\tilde{g}(y,w) = g(y) + w \in C^2(\mathbf{R}^{k+1})$, 那么

$$\mathcal{A}_Z\tilde{g}(y,w) = \mathcal{A}_Y g(y) + f(y), \tag{10.3.6}$$

因此, 在这种一般情形下, (10.1.34) 的域 U 的形式为

$$U = \{y;\ \mathcal{A}_Y g(y) + f(y) > 0\}. \tag{10.3.7}$$

例 10.3.1 考虑最优停时问题:

$$\Phi(x) = \sup_\tau E^x\left[\int_0^\tau \theta e^{-\rho t} X_t dt + e^{-\rho\tau} X_\tau\right],$$

这里

$$dX_t = \alpha X_t dt + \beta X_t dB_t, \quad X_0 = x > 0$$

是一个几何布朗运动 (α, β, θ 都是常数, $\theta > 0$). 记

$$dY_t = \begin{pmatrix} dt \\ dX_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha X_t \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta X_t \end{pmatrix} dB_t, \quad Y_0 = (s, x),$$

$$dZ_t = \begin{pmatrix} dY_t \\ dW_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha X_t \\ \theta e^{-\rho t} X_t \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta X_t \\ 0 \end{pmatrix} dB_t, \quad Z_0 = (s, x, w),$$

那么

$$f(y) = f(s,x) = \theta e^{-\rho s} x, \quad g(y) = e^{-\rho s} x,$$
$$\tilde{g}(s,x,w) = g(s,x) + w = e^{-\rho s} x + w,$$

有

$$\mathcal{A}_Z \tilde{g} = \frac{\partial \tilde{g}}{\partial s} + \alpha x \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x} + \frac{1}{2}\beta^2 x^2 \frac{\partial^2 \tilde{g}}{\partial x^2} + \theta e^{-\rho s} x \frac{\partial \tilde{g}}{\partial w} = (-\rho + \alpha + \theta) e^{-\rho s} x.$$

因此

$$U = \{(s,x,w);\ \mathcal{A}_Z \tilde{g}(s,x,w) > 0\} = \begin{cases} \mathbf{R}^3, & 如果\ \rho < \alpha + \theta, \\ \varnothing, & 如果\ \rho \geqslant \alpha + \theta. \end{cases}$$

从上可得出结论 (见练习 10.6): 如果 $\rho \geqslant \alpha + \theta$, 那么 $\tau^* = 0$, 且

$$\Phi(s,x,w) = \tilde{g}(s,x,w) = e^{-\rho s} x + w. \tag{10.3.8}$$

如果 $\alpha < \rho < \alpha + \theta$, 那么 τ^* 不存在, 且

$$\Phi(s,x,w) = \frac{\theta x}{\rho - \alpha} e^{-\rho s} + w. \tag{10.3.9}$$

如果 $\rho \leqslant \alpha$, 那么 τ^* 不存在且

$$\Phi = \infty. \tag{10.3.10}$$

10.4 与变分不等式的联系

"高度相切原理" 粗略地说, 在确定性条件下, 如果 $g \in C^2(\mathbf{R}^n)$, 问题 (10.1.2), (10.1.3) 的解 g^* 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 C^1 函数. 这是一个有用的信息, 它有助于决定 g^*. 事实上, 这个原理是如此的有用, 以至它经常应用于文献中, 而它的有效性却不加以严格的证明.

幸运地, 对于高度相切, 比较容易证明它的一个充分条件, 即关于最优停时的一类验证定理, 它使得对一个候补 g^*(可通过猜测或直觉得到), 容易证明它实际上就是 g^*. 下面的结果就是在 Brekke 和 Øksendan (1991) 中的一个结果的简化变形.

下面在 $\mathbf{R}^n$ 中固定一个区域 G, 设

$$dY_t = b(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dB_t, \quad Y_0 = y \tag{10.4.1}$$

是 $\mathbf{R}^k$ 中的一个 Itô 扩散. 定义

$$\tau_G = \tau_G(y,\omega) = \inf\{t > 0;\ Y_t(\omega) \notin G\}. \tag{10.4.2}$$

如果设 $f:\ \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$, $g:\ \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ 都是连续函数且满足:

(a)

$$E^y\left[\int_0^{\tau_G} f^-(Y_t)dt\right] < \infty, \quad \forall\ y \in \mathbf{R}^k, \tag{10.4.3}$$

(b)

族 $\{g^-(Y_\tau);\ \tau$ 为停时, $\tau \leqslant \tau_G\}$ 相对于 $R^y(Y_t$ 的概率律) 是一致可积的, $\forall y \in \mathbf{R}^k$. (10.4.4)

记 $\mathcal{T}$ 表示满足 $\tau \leqslant \tau_G$ 的停时 τ 之全体的集合. 考虑下面的问题: 求 $\Phi(y)$ 和 $\tau^* \in \mathcal{T}$ 使得

$$\Phi(y) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} J^\tau(y) = J^{\tau^*}(y), \tag{10.4.5}$$

这里

$$J^\tau(y) = E^y\left[\int_0^\tau f(Y_t)dt + g(Y_\tau)\right], \quad \tau \in \mathcal{T}.$$

注意, 因为 $J^0(y) = g(y)$, 有

$$\Phi(y) \geqslant g(y), \quad \forall\ y \in G. \tag{10.4.6}$$

现在可得出变分不等式, 如通常一样记

$$L = L_Y = \sum_{i=1}^k b_i(y)\frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^k (\sigma\sigma^T)_{ij}(y)\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}$$

是偏微分算子, 它与 Y_t 的生成元 A_Y 在 $C_0^2(\mathbf{R}^k)$ 上是一致的.

定理 10.4.1 (最优停时的变分不等式) a) 假定能找到函数 $\phi:\ \bar{G} \to \mathbf{R}$ 使得

(i) $\phi \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$.

(ii) 在 G 上, $\phi \geqslant g$, 且 $\lim_{t\to\tau_G^-} \phi(Y_t) = g(Y_{\tau_G})\mathcal{X}_{\{\tau_G<\infty\}}$ a.s. 定义

$$D = \{x \in G;\ \phi(x) > g(x)\}.$$

假设 Y_t 在 ∂D 上的停留时间为 0, a.s., 即

(iii) $E^y[\int_0^{\tau_G} \mathcal{X}_{\partial D}(Y_t)dt] = 0, \quad \forall\, y \in G$. 同时假定,

(iv) ∂D 是一个 Lipschitz 表面. 即 ∂D 是某函数 $h:\ \mathbf{R}^{k+1} \to \mathbf{R}$ 的局部图像, 使得存在 $K < \infty$, 有

$$|h(x) - h(y)| \leqslant K|x - y|, \quad \forall x,\ y,$$

而且, 假定

(v) $\phi \in C^2(G \setminus \partial D)$, 且 ϕ 的二阶偏导在 ∂D 附近是局部有界的.

(vi) 在 $G \setminus D$ 上, $L\phi + f \leqslant 0$. 那么

$$\phi(y) \geqslant \Phi(y), \quad \forall\, y \in G.$$

b) 在以上条件中附加假定:

(vii) $L\phi + f = 0$, 在 D 内.

(viii) $\tau_D := \inf\{t > 0;\ y_t \notin D\} < \infty$, a.s. R^y, $\forall\, y \in G$.

(ix) 对任意的 $y \in G$, 族 $\{\phi(Y_\tau);\ \tau \leqslant \tau_D,\ \tau \in \mathcal{T}\}$ 相对于 R^y 是一致可积的. 那么

$$\phi(y) = \Phi(y) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} E^y\left[\int_0^\tau f(Y_t)dt + g(Y_\tau)\right], \quad y \in G, \tag{10.4.7}$$

$$\tau^* = \tau_D \tag{10.4.8}$$

是这个问题的最优停时.

证明 由 (i), (iv) 和 (v) 能找到函数序列: $\phi_j \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$, $j = 1, 2, \cdots$, 使得

(a) 当 $j \to \infty$ 时, $\phi_j \to \phi$, 在 $\bar{G}$ 的紧子集上一致收敛.

(b) 当 $j \to \infty$ 时, $L\phi_j \to L\phi$, 在 $G \setminus \partial D$ 的紧子集上一致收敛.

(c) $\{L\phi_j\}_{j=1}^\infty$ 在 G 上局部有界 (见附录 D).

设 $\{G_R\}_{R=1}^\infty$ 是一个有界开集序列, 使得 $G = \cup_{R=1}^\infty G_R$. 记 $T_R = \min(R, \inf\{t > 0;\ Y_t \notin G_R\})$, $\tau \leqslant \tau_G$ 是一个停时, $y \in G$. 那么由 Dynkin 公式有

$$E^y[\phi_j(Y_{\tau \wedge T_R})] = \phi_j(y) + E^y\left[\int_0^{\tau \wedge T_R} L\phi_j(Y_t)dt\right], \tag{10.4.9}$$

因此, 由 (a)~(c) 和 (iii) 及有界收敛定理得

$$\begin{aligned}\phi(y) &= \lim_{j \to \infty} E^y\left[\int_0^{\tau \wedge T_R} -L\phi_j(Y_t)dt + \phi_j(Y_{\tau \wedge T_R})\right] \\ &= E^y\left[\int_0^{\tau \wedge T_R} -L\phi(Y_t)dt + \phi(Y_{\tau \wedge T_R})\right].\end{aligned} \tag{10.4.10}$$

故由 (ii)~(iv) 可得

$$\phi(y) \geqslant E^y\left[\int_0^{\tau\wedge T_R} f(Y_t)dt + g(Y_{\tau\wedge T_R})\right].$$

由 Fatou 引理和 (10.4.3), (10.4.4) 得

$$\phi(y) \geqslant \varliminf_{R\to\infty} E^y\left[\int_0^{\tau\wedge T_R} f(Y_t)dt + g(Y_{\tau\wedge T_R})\right] \geqslant E^y\left[\int_0^{\tau} f(Y_t)dt + g(Y_\tau)\right].$$

因为 $\tau \leqslant \tau_G$ 是任意的停时, 可得出

$$\phi(y) \geqslant \Phi(y), \quad \forall\, y \in G, \tag{10.4.11}$$

由此证明了 a). 下面证明 b). 如果 $y \notin D$, 那么 $\phi(y) = g(y) \leqslant \Phi(y)$, 故由 (10.4.11) 有

$$\phi(y) = \Phi(y),\ \hat{\tau} = \hat{\tau}(y,\omega) = 0 \text{ 是最优的.} \tag{10.4.12}$$

现在假设 $y \in D$, $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是递增的开集序列使得: 对 $\forall\, k$, $\bar{D}_k \subset D$, $\bar{D}_k$ 是紧集, 且 $D = \cup_{k=1}^{\infty} D_k$. 记 $\tau_k = \inf\{t > 0;\ Y_t \notin D_k\}$, $k = 1, 2, \cdots$, 由 Dynkin 公式, 对 $y \in D_k$, 有

$$\begin{aligned}
\phi(y) &= \lim_{j\to\infty} \phi_j(y) = \lim_{j\to\infty} E^y\left[\int_0^{\tau_k\wedge T_R} -L\phi_j(Y_t)dt + \phi_j(Y_{\tau_k\wedge T_R})\right]\\
&= E^y\left[\int_0^{\tau_k\wedge T_R} -L\phi(Y_t)dt + \phi(Y_{\tau_k\wedge T_R})\right]\\
&= E^y\left[\int_0^{\tau_k\wedge T_R} f(Y_t)dt + \phi(Y_{\tau_k\wedge T_R})\right],
\end{aligned}$$

故由一致可积性及 (ii), (vii), (viii) 得到

$$\begin{aligned}
\phi(y) &= \lim_{R,k\to\infty} E^y\left[\int_0^{\tau_k\wedge T_R} f(Y_t)dt + \phi(Y_{\tau_k\wedge T_R})\right]\\
&= E^y\left[\int_0^{\tau_D} f(Y_t)dt + g(Y_{\tau_D})\right] = J^{\tau_D}(y) \leqslant \Phi(y),
\end{aligned} \tag{10.4.13}$$

结合 (10.4.11) 和 (10.4.13) 可得

$$\phi(y) \geqslant \Phi(y) \geqslant J^{\tau_D}(y) = \phi(y).$$

故当 $y \in D$ 时

$$\phi(y) = \Phi(y),\ \hat{\tau}(y,\omega) := \tau_D \text{ 是最优的.} \tag{10.4.14}$$

从 (10.4.12) 和 (10.4.14) 得到

$$\phi(y) = \Phi(y), \quad \forall\, y \in G,$$

更且, 停时 $\hat{\tau}$ 定义为

$$\hat{\tau}(y,\omega) = \begin{cases} 0, & y \notin D, \\ \tau_D, & y \in D \end{cases}$$

是最优的, 由定理 10.1.12 知 τ_D 也是最优的.

例 10.4.2 (何时卖掉股票最好 (第 2 部分)) 为说明定理 10.4.1, 重新考虑例 10.2.2. 不去证明 (10.2.8) 及其下面关于 D 的性质. 而是简单地猜测 D 有如下形式

$$D = \{(s,x);\ \ 0 < x < x_0\},$$

其中 $x_0 > 0$, 直觉上它是合理的. 然后对任意的 x_0, 解 (10.2.11), 得到 g^* 的候补者 ϕ:

$$\phi(s,x) = \begin{cases} e^{-\rho s}(x_0 - a)\left(\dfrac{x}{x_0}\right)^{\gamma_1}, & 0 < x < x_0, \\ e^{-\rho s}(x-a), & x \geqslant x_0. \end{cases}$$

要求 $\phi \in C^1$ (定理 10.4.1(i)), 由此给出 x_0 的值 (10.2.13). 显然, 在 ∂D 外, $\phi \in C^2$, 在 D 内, $L\phi = 0$. 更且, 条件 (iii), (iv), (viii) 和 (ix) 显然成立. 余下只需验证:

(ii) 对 $0 < x < x_0$, $\phi(s,x) > g(s,x)$, 即 $\phi(s,x) > e^{-\rho s}(x-a)$.

(iv) 对 $x > x_0$, $L\phi(s,x) \leqslant 0$. 即 $Lg(s,x) \leqslant 0$.

这通过直接计算 (假定 $r < \rho$) 很容易得到. 于是得出 $g^* = \phi$, $\tau^* = \tau_D$ 是最优的 (x_0 的值为 (10.2.13)).

练　　习

10.1*. 对下面的每个最优停时问题求上确界 g^*, 如果最优停时 τ^* 存在, 求出 τ^* (这里 B_t 表示 1 维的布朗运动).

a) $g^*(x) = \sup_\tau E^x[B_\tau^2]$.

b) $g^*(x) = \sup_\tau E^x[|B_\tau|^p]$, 这里 $p > 0$.

c) $g^*(x) = \sup_\tau E^x[e^{-B_\tau^2}]$.

d) $g^*(x) = \sup_\tau E^{(s,x)}[e^{-\rho(s+\tau)}\cosh B_\tau]$, 这里 $\rho > 0$. $\cosh x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

10.2*. a) 证明 $\mathbf{R}^2$ 中非负的 (B_t^-) 上调和函数必为常数. 提示: 假设 u 是一个非负的上调和函数, 且存在 x, $y \in \mathbf{R}^2$, 使得 $u(x) < u(y)$, 考虑

$$E^x[u(B_\tau)],$$

这里 τ 是 B_t 到一个以 y 为圆心的小圆盘的首达时.

b) 证明 $\mathbf{R}$ 中的非负的上调和函数必为常数, 且利用这点求 $g^*(x)$. 这里

$$g(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

c) 设 $\gamma \in \mathbf{R}$, $n \geqslant 3$. 对 $x \in \mathbf{R}^n$ 定义

$$f_\gamma(x) = \begin{cases} |x|^\gamma, & |x| \geqslant 1, \\ 1, & |x| < 1. \end{cases}$$

对 $|x| > 1$, γ 为何值时, $f_\gamma(\cdot)$ 是 (B_t^-) 调和的? 证明: 当且仅当 $\gamma \in [2-n, 0]$ 时, f_γ 在 $\mathbf{R}^n$ 中是上调和的.

10.3*. 求 g^*, τ^* 使得

$$g^*(s,x) = \sup_\tau E^{s,x}[e^{-\rho(s+\tau)}B_\tau^2] = E^{s,x}[e^{-\rho(s+\tau^*)}B_{\tau^*}^2],$$

这里 B_t 是 1 维布朗运动, $\rho > 0$ 为常数. 提示: 首先假定它的连续域形式为存在某个 x_0: $D = \{(s,x);\ -x_0 < x < x_0\}$. 然后想办法确定 x_0, 再应用定理 10.4.1.

10.4. 设 X_t 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 Itô 扩散. $g:\ \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^+$ 是连续的报酬函数, 定义

$$g^\diamond(x) = \sup\{E^x[g(X_\tau)];\ \tau \text{ 为停时},\ E^x[\tau] < \infty\},$$

证明 $g^\diamond = g^*$. 提示: 如果 τ 是一个停时, 设 $\tau_k = \tau \wedge k$, $k = 1, 2, \cdots$, 然后考虑

$$E^x[g(X_\tau)\cdot \mathcal{X}_{\tau<\infty}] \leqslant E^x[\varliminf_{k\to\infty} g(X_{\tau_k})].$$

10.5. g, r, ρ 如例 10.2.2 中一样, 证明

a) 如果 $r > \rho$, 那么 $g^* = \infty$.

b) 如果 $r = \rho$, 那么 $g^*(s,x) = xe^{-\rho s}$.

10.6. 证明例 10.3.1 中的 (10.3.8)~(10.3.10).

10.7. 作为练习 10.4 的补充, 值得注意的是当 g 不是下有界时, 那么这两个问题:

$$g^*(x) = \sup\{E^x[g(X_\tau)];\ \tau \text{ 为停时}\}$$

和

$$g^\diamond(x) = \sup\{E^x[g(X_\tau)];\ \tau \text{ 为停时},\ E^x[\tau] < \infty\}$$

不一定有相同的解. 例如如果 $g(x) = x$, $X_t = B_t \in \mathbf{R}$, 证明

$$g^*(x) = \infty, \quad \forall\, x \in \mathbf{R},$$

而

$$g^\diamond(x) = x, \quad \forall\, x \in \mathbf{R}$$

(见练习 7.4).

10.8. 给出一个 g 不是下有界的, 使得定理 10.1.9 a) 失效的例子. 提示: 见练习 10.7.

10.9*. 解最优停时问题:

$$\Phi(x) = \sup_{\tau} E^x\left[\int_0^{\tau} e^{-\rho t} B_t^2 dt + e^{-\rho\tau} B_\tau^2\right].$$

10.10. 证明下面简单但有用的观测. 它可看作 (10.1.35) 的一个扩张. 记 $W = \{(s,x);$ $\exists\, \tau$ 使得 $g(s,x) < E^{(s,x)}[g(s+\tau, X_\tau)]\}$, 那么 $W \subset D$.

10.11. 考虑最优停时问题

$$g^*(x) = \sup_{\tau} E^{(s,x)}[e^{-\rho(s+\tau)} B_\tau^+],$$

这里 $B_t \in \mathbf{R}$, $x^+ = \max\{x, 0\}$.

a) 利用 (10.2.8) 的论证及练习 10.10, 证明连续域 D 的形式是存在某个 x_0:

$$D = \{(s,x);\ x < x_0\}.$$

b) 确定 x_0, 然后求 g^*.

c) 证明高度相切原理:

$$当\ (s,x) = (s,x_0)\ 时, \quad \frac{\partial g^*}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x},$$

这里 $g(t,x) = e^{-\rho t} x^+$.

10.12*. 高度相切原理的第一次出现似乎是在 Samuelson(1965) 的论文中. 如果在 t 时刻卖掉价格为 ξ 的资产所获得的报酬为

$$g(t,\xi) = e^{-\rho t}(\xi - 1)^+,$$

价格过程 X_t 假定为几何布朗运动

$$dX_t = rX_t dt + \alpha X_t dB_t, \quad X_0 = x > 0,$$

这里 $r < \rho$. 他研究了卖资产的最优时间问题. 换句话说, 问题是求 G^*, τ^*, 使得

$$g^*(s,x) = \sup_{\tau} E^{(s,x)}[e^{-\rho(s+\tau)}(X_\tau - 1)^+] = E^{(s,x)}[e^{-\rho(s+\tau^*)}(X_{\tau^*} - 1)^+].$$

a) 利用 (10.2.8) 的论证及练习 10.10, 证明连续域 D 的形式是存在某个 $x_0 > \dfrac{\rho}{\rho - r}$,

$$D = \{(s,x);\ x < x_0\}.$$

b) 对给定的 $x_0 > \dfrac{\rho}{\rho - r}$, 试用 $f(s,x) = e^{-\rho s}\phi(x)$ 解边界值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial s} + rx\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\alpha^2 x^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < x_0, \\ f(s,0) = 0, \\ f(s,x_0) = e^{-\rho s}(x_0 - 1)^+, \end{cases}$$

c) 利用高度相切原理确定 x_0, 即利用

$$\text{当 } x = x_0 \text{ 时}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

d) f, x_0 如 b), c). 定义

$$\gamma(s,x) = \begin{cases} f(s,x), & x < x_0, \\ e^{-\rho s}(x-1)^+, & x \geqslant x_0. \end{cases}$$

利用定理 10.4.1 证明 $g^* = \gamma$, $\tau^* = \tau_D$ 是最优的.

10.13*: (资源析取问题) 假定一单位资源 (如汽、石油), 在 t 时刻的价格 P_t 的变化服从几何布朗运动

$$dP_t = \alpha P_t dt + \beta P_t dB_t, \quad P_0 = P,$$

这里 B_t 是 1 维的布朗运动. α, β 为常数. Q_t 表示在 t 时刻剩余资源的数量. 假定析取率与剩余资源的比例关系为

$$dQ_t = -\lambda Q_t dt, \quad Q_0 = q,$$

这里 λ 为常数. 如果运营成本率为 $K > 0$, 在 $\tau = \tau(\omega)$ 时停止析取. 那么总的折现利润的期望是

$$J^\tau(s,p,q) = E^{(s,p,q)}\left[\int_0^\tau (\lambda P_t Q_t - K)e^{-\rho(s+t)}dt + e^{-\rho(s+\tau)}g(P_\tau, Q_\tau)\right],$$

这里 $\rho > 0$ 是折现指数. $g(p,q)$ 是当剩余的资源数量为 q, 价格为 p 时的遗赠函数.

a) 写出如下扩散过程:

$$dX_t = \begin{pmatrix} dt \\ dP_t \\ dQ_t \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} s \\ p \\ q \end{pmatrix}$$

的特征算子 $\mathcal{A}$, 及定理 10.4.1 中相应于最优停时问题

$$\Phi(s,p,q) = \sup_\tau J^\tau(s,p,q) = J^{\tau^*}(s,p,q)$$

的变分不等式.

b) 假定 $g(p,q) = pq$, 求相应于 (10.1.34), (10.3.7) 的区域 U, 即

$$U = \{(s,p,q);\ \mathcal{A}(e^{-\rho s}g(p,q)) + f(s,p,q) > 0\},$$

这里

$$f(s,p,q) = e^{-\rho s}(\lambda pq - K).$$

推导

(i) 如果 $\rho \geqslant \alpha$, 那么 $\tau^* = 0$, $\Phi(s,p,q) = pqe^{-\rho s}$.

(ii) 如果 $\rho < \alpha$, 那么 $D \supset \left\{(s,p,q);\ pq > \dfrac{K}{\alpha - \rho}\right\}$.

c) 作为 Φ 的候补者, 当 $\rho < \alpha$ 时, 试用下面的函数:

$$\phi(s,p,q) = \begin{cases} e^{-\rho s}pq, & 0 < pq \leqslant y_0, \\ e^{-\rho s}\psi(pq), & pq > y_0, \end{cases}$$

其中 $\psi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, y_0 为待定的. 利用定理 10.4.1 确定 ϕ, y_0, 且证明当 $\rho < \alpha < \rho + \lambda$ 时, $\Phi = \phi$, $\tau^* = \inf\{t > 0;\ P_tQ_t \leqslant y_0\}$.

d) 如果 $\rho + \lambda \leqslant \alpha$, 会怎么样?

10.14*. (求最优投资时间 (I)) 解最优停时问题

$$\Psi(s,p) = \sup_{\tau} E^{(s,p)}\left[\int_{\tau}^{\infty} e^{-\rho(s+t)}P_t dt - Ce^{-\rho(s+\tau)}\right],$$

这里

$$dP_t = \alpha P_t dt + \beta P_t dB_t, \quad P_0 = p,$$

B_t 是 1 维布朗运动. α, β, ρ, C 都为常数. $0 < \alpha < \rho$, $C > 0$ (可把它理解为求一个项目的最优投资时间 τ 的问题. 投资后的利润流为 P_t, 投资成本为 C. Φ 表示最大的期望折现净利润).

提示: 写出 $\int_{\tau}^{\infty} e^{-\rho(s+t)}P_t dt = e^{-\rho s}\left[\int_0^{\infty} e^{-\rho t}P_t dt - \int_0^{\tau} e^{-\rho t}P_t dt\right]$, 利用 P_t 的解的公式 (见第 5 章) 计算 $E\left[\int_0^{\infty} e^{-\rho t}P_t dt\right]$. 然后应用定理 10.4.1 于问题:

$$\Phi(s,p) = \sup_{\tau} E^{(s,p)}\left[-\int_0^{\tau} e^{-\rho(s+t)}P_t dt - Ce^{-\rho(s+\tau)}\right].$$

10.15. 设 B_t 为 1 维布朗运动, $\rho > 0$ 为常数.

a) 证明族 $\{e^{-\rho\tau}B_\tau;\ \tau \text{ 为停时}\}$ 相对于 P^x 是一致可积的.

b) 解最优停时问题:

$$\Phi(s,p) = \sup_{\tau} E^{(s,x)}[e^{-\rho(s+\tau)}(B_\tau - a)],$$

这里 $a > 0$ 为常数. 它可看成例 10.2.2/10.4.2 的一个变形, 其中价格过程用 B_t 取代了 X_t.

10.16. (求最优投资时间 (II)) 解最优停时问题:

$$\Psi(s,p) = \sup_{\tau} E^{(s,p)}\left[\int_{\tau}^{\infty} e^{-\rho(s+t)}P_t dt - Ce^{-\rho(s+\tau)}\right],$$

这里 $dP_t = \mu dt + \sigma dB_t$; $P_0 = p$, μ, $\sigma \neq 0$ 都是常数 (与练习 10.14 进行比较).

10.17. a) 设 $dX_t = \mu dt + \sigma dB_t$; $X_0 = x \in \mathbf{R}$, 这里 μ, σ 都为常数. 证明: 如果常数 $\rho > 0$, 那么对任意的 x,

$$E^x\left[\int_0^{\infty} e^{-\rho t}|X_t| dt\right] < \infty.$$

b) 解最优停时问题:

$$\Phi(s,p) = \sup_{\tau \geqslant 0} E^{(s,x)}\left[\int_0^{\tau} e^{-\rho(s+t)}(X_t - a)\right],$$

这里 $a \geqslant 0$ 是常数.

第 11 章　在随机控制方面的应用

11.1　问题的陈述

假设在 t 时刻, 系统的状态由下面的 Itô 过程来描述:

$$dX_t = dX_t^u = b(t, X_t, u_t)dt + \sigma(t, X_t, u_t)dB_t, \tag{11.1.1}$$

这里 $X_t \in \mathbf{R}^n$, $b: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times U \to \mathbf{R}^n$, $\sigma: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times U \to \mathbf{R}^{n\times m}$, B_t 为 m 维布朗运动. $u_t \in U \subset \mathbf{R}^k$ 为参数, 可在任何时刻 t 瞬间, 选择该参数的值以便控制过程 X_t. 因此 $u_t = u(t,\omega)$ 是一个随机过程, 由于在 t 时刻的决策一定基于直到 t 时刻之前所发生的一切来作出的. 故函数 $\omega \to u(t,\omega)$ 必须 (至少) 是关于 $\mathcal{F}_t^{(m)}$ 可测的. 即过程 u_t 必定是 $\mathcal{F}_t^{(m)}$ 适应的. 因此对函数 b 和 σ 作适当的假定, 方程 (11.1.1) 的右边作为随机积分是很好定义的. 这里不特别提出 b 和 σ 的条件, 仅假定满足 (11.1.1) 的过程 X_t 存在. 关于它的更进一步的讨论放在本章最后.

设 $\{X_h^{s,x}\}_{h\geqslant s}$ 是 (11.1.1) 的解, 且使得 $X_s^{s,x} = x$, 即

$$X_h^{s,x} = x + \int_s^h b(r, X_r^{s,x}, u_r)dr + \int_s^h \sigma(r, X_r^{s,x}, u_r)dB_r, \quad h \geqslant s.$$

设在 $t = s$ 时, 初始值为 x 的过程 X_t 的概率律由 $Q^{s,x}$ 表示, 且对 $s \leqslant t_i$, $F_i \subset \mathbf{R}^n$; $1 \leqslant i \leqslant k$, $k = 1, 2, \cdots$. 满足

$$Q^{s,x}[X_{t_1} \in F_1, \cdots, X_{t_k} \in F_k] = P^0[X_{t_1}^{s,x} \in F_1, \cdots, X_{t_k}^{s,x} \in F_k]. \tag{11.1.2}$$

设 $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times U \to \mathbf{R}$(利率函数), $g: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$(遗赠函数) 是给定的连续函数, G 是 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ 中的固定区域, $\hat{T}$ 表示在时刻 s 之后, 过程 $\{X_r^{s,x}\}_{r\geqslant s}$ 首次逸出 G 的时间, 即

$$\hat{T} = \hat{T}^{s,x}(\omega) = \inf\{r > s;\ (r, X_r^{s,x}(\omega)) \notin G\} \leqslant \infty. \tag{11.1.3}$$

假定

$$E^{s,x}\Big[\int_s^{\hat{T}} |f^{u_r}(r, X_r)|dr + |g(\hat{T}, X_{\hat{T}})|\mathcal{X}_{\{\hat{T}<\infty\}}\Big] < \infty, \quad \forall\ s, x, u, \tag{11.1.4}$$

这里 $f^u(r,z) = f(r,z,u)$. 那么, 定义性能函数 $J^u(s,x)$ 如下

$$J^u(s,x) = E^{s,x}\Big[\int_s^{\hat{T}} f^{u_r}(r, X_r)dr + g(\hat{T}, X_{\hat{T}})\mathcal{X}_{\{\hat{T}<\infty\}}\Big], \tag{11.1.5}$$

为简单起见, 引入

$$Y_t = (s+t, X_{s+t}^{s,x}), \quad t \geqslant 0,\ Y_0 = (s,x).$$

由此有

$$dY_t = dY_t^u = b(Y_t, u_t)dt + \sigma(Y_t, u_t)dB_t \tag{11.1.6}$$

(严格地讲, (11.1.6) 中的 u, b, σ 与 (11.1.1) 中的 u, b, σ 稍微有点差别). 对 $t=0$, 初始值 $y=(s,x)$ 的过程 Y_t 的概率律也同样由 $Q^{s,x}=Q^y$ 表示. 注意

$$\int_s^{\hat{T}} f^{u_r}(r, X_r)dr = \int_0^{\hat{T}-s} f^{u_{s+t}}(s+t, X_{s+t})dt = \int_0^{\tau_G} f^{u_{s+t}}(Y_t)dt,$$

这里

$$\tau_G := \inf\{t > 0;\ Y_t \notin G\} = \hat{T} - s, \tag{11.1.7}$$

而且

$$g(\hat{T}, X_{\hat{T}}) = g(Y_{\hat{T}-s}) = g(Y_{\tau_G}),$$

因此性能函数可依 Y 写成

$$J^u(y) = E^y\Big[\int_0^{\tau_G} f^{u_t}(Y_t)dt + g(Y_{\tau_G})\mathcal{X}_{\{\tau_G<\infty\}}\Big], \tag{11.1.8}$$

这里 $y=(s,x)$ (严格地讲, 这个 u_t 是 (11.1.6) 中 u_t 的一个时间移位).

问题是对每个 $y \in G$ 求数 $\Phi(y)$, 及一个控制 $u^* = u^*(t,\omega) = u^*(y,t,\omega) \in \mathcal{A}$, 使得

$$\Phi(y) := \sup_{u(t,\omega)} J^u(y) = J^{u^*}(y), \tag{11.1.9}$$

这里上确界是取遍给定的容许的控制集 $\mathcal{A}$, 它包含于在 U 中取值的所有 $\mathcal{F}_t^{(m)}$ 适应过程 $\{u_t\}$ 之全体集合. 如果这样的控制 u^* 存在, 称它为最优控制, 而 Φ 称为最优性能函数或值函数. 可能被考虑的容许的控制函数类型如下:

(1) 形如 $u(t,\omega)=u(t)$ 的函数, 即不依赖于 ω. 这种控制常称为确定控制或开环控制.

(2) 过程 $\{u_t\}$ 是 $\mathcal{M}_t$ 适应的. 即对每个 t, 函数 $\omega \to u(t,\omega)$ 是 $\mathcal{M}_t$ 可测的. 这里 $\mathcal{M}_t$ 是由 $\{X_r^u;\ r \leqslant t\}$ 生成的 σ 代数. 这种控制称为闭环控制或反馈控制.

(3) 控制器仅有系统状态的部分信息, 更精确地说, 控制器的配置仅仅是 X_t 的 (噪声) 观测值 R_t, 它由下面的 Itô 过程给出

$$dR_t = a(t, X_t)dt + \gamma(t, X_t)d\hat{B}_t,$$

这里 $\hat{B}$ 是一个布朗运动 (不必与 B 相关). 因此控制过程 $\{u_t\}$ 一定是关于 $\{R_s;\ s \leqslant t\}$ 生成的 σ 代数 $\mathcal{N}_t$ 适应的. 此时随机控制问题与滤波问题 (第 6 章) 相连在一

起. 事实上, 如果方程 (11.1.1) 是线性的且性能函数是整二次的 (即 f 与 g 都是二次的). 那么随机控制问题可分解成线性滤波问题与一个相应的确定控制问题, 这个称为分离原理, 见例 11.2.4.

(4) 函数 $u(t,\omega)$ 具有形式 $u(t,\omega)=u_0(t,X_t(\omega))$, 其中 u_0 为某个 $\mathbf{R}^{n+1}\to U\subset\mathbf{R}^k$ 的函数. 此时假定 u 不依赖于初始值 $y=(s,x)$, 在 t 时刻选择的值仅依赖于系统在这个时刻的状态, 称它们为 Markov 控制. 因为在这样选择的控制 u 下, 相应的过程 X_t 变成 Itô 扩散, 特别是一个 Markov 过程. 下面将不区分 u 与 u_0, 如此将把函数 $u:\mathbf{R}^{n+1}\to U$ 与 Markov 控制 $u(Y)=u(t,X_t)$ 等同起来, 简单地称这样的函数为 Markov 控制.

11.2 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程

先仅考虑 Markov 控制

$$u=u(t,X_t(\omega)).$$

引入 $Y_t=(s+t,X_{s+t})$(如先前解释的那样), 系统方程变为

$$dY_t=b(Y_t,u(Y_t))dt+\sigma(Y_t,u(Y_t))dB_t. \tag{11.2.1}$$

对 $v\in U$ 和 $\phi\in C_0^2(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n)$, 定义

$$(L^v\phi)(y)=\frac{\partial\phi}{\partial s}(y)+\sum_{i=1}^n b_i(y,v)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(y,v)\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j}, \tag{11.2.2}$$

这里 $a_{ij}=\dfrac{1}{2}(\sigma\sigma^T)_{ij}$, $y=(s,x)$, $x=(x_1,\cdots,x_n)$. 那么对每个选择的函数 u, 解 $Y_t=Y_t^u$ 是一个 Itô扩散, 它的生成元 A 为

$$(A\phi)(y)=(L^{u(y)}\phi)(y),\quad \phi\in C_0^2(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n+1})$$

(见定理 7.3.3), 对 $v\in U$, 定义 $f^v(y)=f(y,v)$. 关于随机控制理论的第一个基本结果如下:

定理 11.2.1 (Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB) 方程 (I)) 定义

$$\Phi(y)=\sup\{J^u(y);\ u=u(y)\ \text{Markov 控制}\}.$$

假定 $\Phi\in C^2(G)\cap C(\bar G)$, 对任意有界停时 $\alpha\leqslant\tau_G$, $\forall\, y\in G$ 和 $\forall\, v\in U$ 满足:

$$E^y\Big[|\Phi(Y_\alpha)|+\int_0^\alpha|L^v\Phi(Y_t)|dt\Big]<\infty,$$

而且, 假定最优 Markov 控制 u^* 存在, 且 ∂G 对 $Y_t^{u^*}$ 是正则的 (定义 9.2.8). 那么

$$\sup_{v\in U}\{f^v(y)+(L^v\Phi)(y)\}=0, \quad \forall y\in G \tag{11.2.3}$$

且

$$\Phi(y)=g(y), \quad \forall y\in\partial G. \tag{11.2.4}$$

如果 $v=u^*(y)$, $u^*(y)$ 是最优控制, 则 (11.2.3) 的上确界可达到. 换句话说

$$f(y,u^*(y))+(L^{u^*(y)}\Phi)(y)=0, \quad \forall\ y\in G. \tag{11.2.5}$$

证明 后面的两点是较易证明的. 因为 $u^*=u^*(y)$ 是最优的, 有

$$\Phi(y)=J^{u^*}(y)=E^y\Big[\int_0^{\tau_G} f(Y_s,u^*(Y_s))ds+g(Y_{\tau_G})\cdot\mathcal{X}_{\{\tau_G<\infty\}}\Big].$$

如果 $y\in\partial G$, 那么 $\tau_G=0$. a.s. Q^y (因为 ∂G 是正则的). 故此 (11.2.4) 成立. 作为 Dirichlet-Poisson 问题 (定理 9.3.3) 的解有

$$(L^{u^*(y)}\Phi)(y)=-f(y,u^*(y)), \quad \forall\ y\in G,$$

此即 (11.2.5). 下面证明 (11.2.3). 固定 $y=(s,x)\in G$, 选择一个 Markov 控制 u. 设 $\alpha\leqslant\tau_G$ 是有界停时, 因为

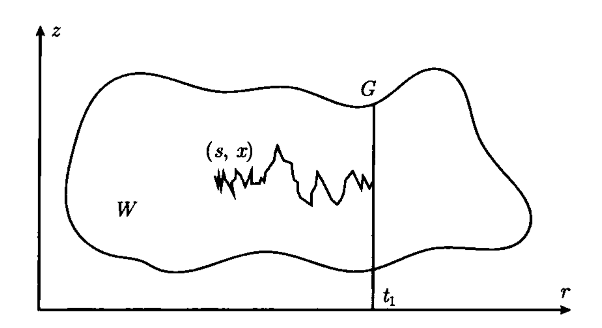
$$J^u(y)=E^y\Big[\int_0^{\tau_G} f^u(Y_r)dr+g(Y_{\tau_G})\cdot\mathcal{M}_{\{\tau_G<\infty\}}\Big],$$

由强 Markov 性 (7.2.5), 结合 (7.2.6) 和 (9.3.7) 得到

$$\begin{aligned}
E^y[J^u(Y_\alpha)]&=E^y\Big[E^{Y_\alpha}\Big[\int_0^{\tau_G} f^u(Y_r)dr+g(Y_{\tau_G})\cdot\mathcal{X}_{\{\tau_G<\infty\}}\Big]\Big]\\
&=E^y\Big[E^y\Big[\theta_\alpha\Big(\int_0^{\tau_G} f^u(Y_r)dr+g(Y_{\tau_G})\cdot\mathcal{X}_{\{\tau_G<\infty\}}\Big)|\mathcal{F}_\alpha\Big]\Big]\\
&=E^y\Big[E^y\Big[\int_\alpha^{\tau_G} f^u(Y_r)dr+g(Y_{\tau_G})\cdot\mathcal{X}_{\{\tau_G<\infty\}}|\mathcal{F}_\alpha\Big]\Big]\\
&=E^y\Big[\int_0^{\tau_G} f^u(Y_r)dr+g(Y_{\tau_G})\cdot\mathcal{X}_{\{\tau_G<\infty\}}-\int_0^\alpha f^u(Y_r)dr\Big]\\
&=J^u(y)-E^y\Big[\int_0^\alpha f^u(Y_r)dr\Big],
\end{aligned}$$

因此

$$J^u(y)=E^y\Big[\int_0^\alpha f^u(Y_r)dr\Big]+E^y[J^u(Y_\alpha)]. \tag{11.2.6}$$



现在设 $W \subset G$, 其形式为 $W = \{(r,z) \in G;\ r < t_1\}$, 这里 $s < t_1$. 记 $\alpha = \inf\{t \geqslant 0;\ Y_t \notin W\}$. 假如最优控制 $u^*(y) = u^*(r,z)$ 存在. 选择

$$u(r,z) = \begin{cases} v, & \text{如果}(r,z) \in W, \\ u^*(r,z), & \text{如果}(r,z) \in G \setminus W, \end{cases}$$

这里 $v \in U$ 是任意的. 那么

$$\Phi(Y_\alpha) = J^{u^*}(Y_\alpha) = J^u(Y_\alpha). \tag{11.2.7}$$

结合 (11.2.6) 和 (11.2.7) 可得

$$\Phi(y) \geqslant J^u(y) = E^y\Big[\int_0^\alpha f^v(Y_r)dr\Big] + E^y[\Phi(Y_\alpha)]. \tag{11.2.8}$$

由于 $\Phi \in C^2(G)$, 由 Dynkin 公式得到

$$E^y[\Phi(Y_\alpha)] = \Phi(y) + E^y\Big[\int_0^\alpha (L^u\Phi)(Y_r)dr\Big],$$

把它代入 (11.2.8) 得到

$$\Phi(y) \geqslant E^y\Big[\int_0^\alpha f^v(Y_r)dr\Big] + \Phi(y) + E^y\Big[\int_0^\alpha (L^v\Phi)(Y_r)dr\Big]$$

或

$$E^y\Big[\int_0^\alpha (f^v(Y_r) + (L^v\Phi)(Y_r))dr\Big] \leqslant 0,$$

故此, 对任意这样的 W:

$$\frac{E^y\Big[\int_0^\alpha (f^v(Y_r) + (L^v\Phi)(Y_r))dr\Big]}{E^y[\alpha]} \leqslant 0.$$

令 $t_1 \downarrow s$, 由于 $f^v(\cdot)$ 和 $(L^v\Phi)(\cdot)$ 在 y 处都是连续的, 有 $f^v(y) + (L^v\Phi)(y) \leqslant 0$, 结合 (11.2.5) 得到 (11.2.3). 证明完成.

附注　HJB(I) 方程表明如果最优控制 u^* 在点 y 处存在, 它的最优值 v 是使函数

$$v \to f^v(y) + (L^v\Phi)(y), \quad v \in U$$

获得最大值 (它的最大值为 0) 的点 v. 于是原随机最优控制问题转化为更容易的问题: 求定义于 $U \subset \mathbf{R}^k$ 的一个实函数的最大值问题. 然而, HJB(I) 方程仅指出 $v = u^*(y)$ 是这个函数取最大值的必要条件, 而它是否也是充分条件则尤显重要: 如果在每个点 y, 找到 $v = u_0(y)$ 使得 $f^v(y) + (L^v\Phi)(y)$ 是最大的且最大值为 0, 那么 $u_0(y)$ 是否为最优控制? 下一个结果表明 (在某些条件下) 它实际上是成立的.

定理 11.2.2 (HJB 方程 (II)—— 一个验证定理)　设 ϕ 是一个 $C^2(G) \cap C(\bar{G})$ 中的函数, 使得对任意的 $v \in U$,

$$f^v(y) + (L^v\phi)(y) \leqslant 0, \quad y \in G \tag{11.2.9}$$

且其边界值

$$\lim_{t \to \tau_G} \phi(Y_t) = g(Y_{\tau_G}) \cdot \mathcal{X}_{\{\tau_G < \infty\}}, \text{ a.s. } Q^y, \tag{11.2.10}$$

同时使得对任意的 Markov 控制 u 和任意的 $y \in G$,

$$\{\phi^-(Y_\tau);\ \tau\text{为停时},\ \tau \leqslant \tau_G\}\text{是一致 } Q^y \text{ 可积的}, \tag{11.2.11}$$

那么对任意的 Markov 控制 u 和任意的 $y \in G$,

$$\phi(y) \geqslant J^u(y), \tag{11.2.12}$$

再者, 如果对每个 $y \in G$, 可找到 $u_0(y)$ 使得

$$f^{u_0(y)}(y) + (L^{u_0(y)}\phi)(y) = 0, \tag{11.2.13}$$

且对任意的 $y \in G$,

$$\{\phi(Y_\tau^{u_0});\ \tau\text{为停时},\ \tau \leqslant \tau_G\}\text{是一致 } Q^y \text{ 可积的}, \tag{11.2.14}$$

那么 $u_0 = u_0(y)$ 是一个 Markov 控制, 满足

$$\phi(y) = J^{u_0}(y),$$

因此, 如果 u_0 是容许的控制, 那么 u_0 必定是一个最优控制, 且 $\phi(y) = \Phi(y)$.

证明　假定 ϕ 满足上面的 (11.2.9) 和 (11.2.10). 设 u 是一个 Markov 控制, 在 G 中, 因为 $L^u\phi \leqslant -f^u$, 由 Dynkin 公式有

$$\begin{aligned} E^y[\phi(Y_{T_R})] &= \phi(y) + E^y\Big[\int_0^{T_R} (L^u\phi)(Y_r)dr\Big] \\ &\leqslant \phi(y) - E^y\Big[\int_0^{T_R} f^u(Y_r)dr\Big], \end{aligned}$$

这里对任意的 $R<\infty$,

$$T_R=\min\{R,\ \tau_G,\ \inf\{t>0;\ |Y_t|\geqslant R\}\}. \tag{11.2.15}$$

由 (11.1.4), (11.2.10), (11.2.11) 及 Fatou 引理可得

$$\begin{aligned}\phi(y)&\geqslant \varliminf_{R\to\infty} E^y\Big[\int_0^{T_R} f^u(Y_r)dr+\phi(Y_{T_R})\Big]\\&\geqslant E^y\Big[\int_0^{\tau_G} f^u(Y_r)dr+\phi(Y_{\tau_G})\mathcal{X}_{\{\tau_G<\infty\}}\Big]=J^u(y),\end{aligned}$$

这样证明了 (11.2.12). 如果 u_0 满足 (11.2.13) 及 (11.2.14). 那么上面的计算成为等式, 证毕.

在仅考虑 Markov 控制的情形下, HJB 方程 (I), (II) 提供了关于随机控制问题的优美的解, 你可能觉得仅考虑 Markov 控制是太受限制了, 但幸运的是, 至少在增加某些额外的条件下, 对任意的 $\mathcal{F}_t^{(m)}$ 适应控制, 可得到与 Markov 控制一样的好的性能.

定理 11.2.3 设

$$\Phi_M(y)=\sup\{J^u(y);\quad u=u(Y)\ \text{Markov 控制}\}$$

和

$$\Phi_a(y)=\sup\{J^u(y);\ u=u(t,\omega),\ \mathcal{F}_t^{(m)}\text{适应控制}\}.$$

假定对 Markov 控制问题, 存在最优控制 $u_0=u_0(Y)$ (即 $\Phi_M(y)=J^{u_0}(y),\ \forall\, y\in G$). 使得 G 的所有的边界点关于 $Y_t^{u_0}$ 是正则的, 且 Φ_M 是 $C^2(G)\cap C(\bar{G})$ 中的有界函数, 对任意的有界停时 $\alpha\leqslant\tau_G$, 任意的适应控制 u 及任意的 $y\in G$ 满足

$$E^y\Big[|\Phi_M(Y_\alpha)|+\int_0^\alpha |L^u\Phi_M(Y_t)|dt\Big]<\infty, \tag{11.2.16}$$

那么

$$\Phi_M(y)=\Phi_a(y),\quad \forall\, y\in G.$$

证明 设 ϕ 是 $C^2(G)\cap C(\bar{G})$ 中的有界函数, 满足 (11.2.16) 和

$$f^v(y)+(L^v\phi)(y)\leqslant 0,\quad \forall\, y\in G,\ v\in U \tag{11.2.17}$$

且

$$\phi(y)=g(y),\quad \forall\, y\in\partial G. \tag{11.2.18}$$

设 $u_t(\omega)=u(t,\omega)$ 是一个 $\mathcal{F}_t^{(m)}$ 适应控制, 那么 Y_t 是一个 Itô 过程

$$dY_t=b(Y_t,u_t)dt+\sigma(Y_t,u_t)dB_t.$$

故由引理 7.3.2, 当 T_R 如 (11.2.15) 时,

$$E^y[\phi(Y_{T_R})] = \phi(y) + E^y\Big[\int_0^{T_R} (L^{u(t,\omega)}\phi)(Y_t)dt\Big],$$

这里

$$(L^{u(t,\omega)}\phi)(y) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(y) + \sum_{i=1}^n b_i(y,u(t,\omega))\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(y) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(y,u(t,\omega))\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}(y),$$

其中 $a_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma\sigma^T)_{ij}$. 于是由 (11.2.17) 和 (11.2.18) 有

$$E^y[\phi(Y_{T_R})] \leqslant \phi(y) - E^y\Big[\int_0^{T_R} f(Y_t,u(t,\omega))dt\Big].$$

令 $R \to \infty$ 可得到

$$\phi(y) \geqslant J^u(y). \tag{11.2.19}$$

但由定理 11.2.1, 函数 $\phi(y) = \Phi_M(y)$ 满足 (11.2.17)~(11.2.19). 故此由 (11.2.19) 有 $\Phi_M(y) \geqslant \Phi_a(y)$. 因此定理 (11.2.3) 成立.

附注　上面的理论也可应用到相应的最小化问题:

$$\Psi(y) = \inf_u J^u(y) = J^{u^*}(y). \tag{11.2.20}$$

为了明白这个联系, 注意到

$$\Psi(y) = -\sup_u\{-J^u(y)\} = -\sup_u\Big\{E^y\Big[\int_0^{\tau_G} -f^u(Y_t)dt - g(Y_{\tau_G})\cdot \mathcal{X}_{\{\tau_G<\infty\}}\Big]\Big\},$$

于是 $-\Psi$ 相应于问题 (11.1.9) 的解 Φ, 只是其中的 f 被 $-f$ 替代, g 被 $-g$ 替代. 利用这一点, HJB 方程也可应用于 Ψ, 只是其中的不等式相反. 例如, 方程 (11.2.3) 把 Φ 换成 Ψ 即可

$$\inf_{v\in U}\{f^v(y) + (L^v\Psi)(y)\} = 0, \quad \forall\, y \in G. \tag{11.2.21}$$

下面通过举例来说明这些结果.

例 11.2.4 (线性随机调节器问题)　假定系统在 t 时刻的状态 X_t 由一个线性随机微分方程给出

$$dX_t = (H_tX_t + M_tu_t)dt + \sigma_t dB_t, \quad t \geqslant s, \quad X_s = x, \tag{11.2.22}$$

成本具有如下的形式

$$J^u(s,x) = E^{s,x}\Big[\int_0^{t_1-s}\{X_t^TC_tX_t + u_t^TD_tu_t\}dt + X_{t_1-s}^TRX_{t_1-s}\Big], \quad s \leqslant t_1, \tag{11.2.23}$$

这里所有的系数 $H_t \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $M_t \in \mathbf{R}^{n\times k}$, $\sigma_t \in \mathbf{R}^{n\times m}$, $C_t \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $D_t \in \mathbf{R}^{k\times k}$, $R \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 都是 t 连续的且为确定性的. 假设对任意的 t, C_t 和 R 是对称的半正定的矩阵, D_t 是对称正定矩阵, 同时设 t_1 是一个确定时间. 问题是选择一个控制 $u = u(t, X_t) \in \mathbf{R}^k$, 使得它最小化 $J^u(s,x)$. 可解释如下：目标是寻找控制 u, 使 $|X_t|$ 快速地变小, 且利用的能量 ($\sim u^T Du$) 是很小的. C_t 和 R 的大小反映了具有较大值的 $|X_t|$ 的成本, D_t 的大小反映了应用较大的 $|u_t|$ 值的成本 (能量).

此时, 关于 $\Psi(s,x) = \inf_u J^u(s,x)$ 的 HJB 方程变为

$$\begin{aligned}0 &= \inf_v \{f^v(s,x) + (L^v\Psi)(s,x)\} \\ &= \frac{\partial \Psi}{\partial s} + \inf_v \Big\{x^T C_s x + v^T D_s v + \sum_{i=1}^n (H_s x + M_s v)_i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n (\sigma_s \sigma_s^T)_{ij} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}\Big\}, \quad s < t_1 \end{aligned} \tag{11.2.24}$$

且

$$\Psi(t_1, x) = x^T R x. \tag{11.2.25}$$

尝试它的如下形式的解 ψ:

$$\psi(t,x) = x^T S_t x + a_t, \tag{11.2.26}$$

这里 $S(t) = S_t \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 为对称的半正定矩阵. $a_t \in \mathbf{R}$, 且它们关于 t 都是连续可微的 (确定的). 为了利用定理 11.2.2, 必须要确定 S_t 和 a_t, 使得

$$\inf_v \{f^v(t,x) + (L^v \psi)(t,x)\} = 0, \quad t < t_1 \tag{11.2.27}$$

且

$$\psi(t_1, x) = x^T R x. \tag{11.2.28}$$

为了得到 (11.2.28), 设

$$S_{t_1} = R, \tag{11.2.29}$$

$$a_{t_1} = 0, \tag{11.2.30}$$

利用 (11.2.26) 得到

$$\begin{aligned} f^v(t,x) + (L^v\psi)(t,x) &= x^T S_t' x + a_t' + x^T C_t x + v^T D_t v \\ &\quad + (H_t x + M_t v)^T (S_t x + S_t^T x) + \sum_{i,j} (\sigma_t \sigma_t^T)_{ij} S_{ij}, \end{aligned} \tag{11.2.31}$$

这里 $S_t' = \dfrac{d}{dt} S_t$, $a_t' = \dfrac{d}{dt} a_t$. 当

$$\frac{\partial}{\partial v_i}(f^v(t,x)+(L^v\psi)(t,x))=0,\quad i=1,\cdots,k,$$

即

$$2D_tv+2M_t^TS_tx=0,$$

即当

$$v=-D_t^{-1}M_t^TS_tx \tag{11.2.32}$$

时 (11.2.31) 达到最小值. 把 v 的值代入到 (11.2.31) 得到

$$\begin{aligned}&f^v(t,x)+(L^v\psi)(t,x)\\=&x^TS_t'x+a_t'+x^TC_tx+x^TS_tM_tD_t^{-1}D_tD_t^{-1}M_t^TS_tx\\&+(H_tx-M_tD_t^{-1}M_t^TS_tx)^T2S_tx+\mathrm{tr}(\sigma\sigma^TS)_t\\=&x^T(S_t'+C_t-S_tM_tD_t^{-1}M_t^TS_t+2H_t^TS_t)x+a_t'+\mathrm{tr}(\sigma\sigma^TS)_t,\end{aligned}$$

这里 tr 表示 (矩阵的) 迹. 如果选择 S_t 和 a_t 使得

$$S_t'=-2H_t^TS_t+S_tM_tD_t^{-1}M_t^TS_t-C_t,\quad t<t_1, \tag{11.2.33}$$

$$a_t'=-\mathrm{tr}(\sigma\sigma^TS)_t,\quad t<t_1, \tag{11.2.34}$$

则可使 (11.2.31) 最小值为 0. 从线性滤波理论 (见 (6.3.4)) 知道 (11.2.33) 是 Riccati 型方程. 它及其边界条件 (11.2.29) 确定了唯一的 S_t. 结合 (11.2.34) 和它的边界条件 (11.2.30) 可得

$$a_t=\int_t^{t_1}\mathrm{tr}(\sigma\sigma^TS)_sds. \tag{11.2.35}$$

随着如此选择 S_t 和 a_t, 则 (11.2.27) 和 (11.2.28) 成立. 故由定理 11.2.2 得出

$$u^*(t,x)=-D_t^{-1}M_t^TS_tx,\quad t<t_1 \tag{11.2.36}$$

是最优控制. 而最优成本为

$$\Psi(s,x)=x^TS_sx+\int_s^{t_1}\mathrm{tr}(\sigma\sigma^TS)_tdt,\quad s<t_1, \tag{11.2.37}$$

这个公式表明系统中的噪声所带来的额外的成本为

$$a_s=\int_s^{t_1}\mathrm{tr}(\sigma\sigma^TS)_tdt.$$

分离原理 (Davis, 1977; Davis, Vinter, 1985; Fleming, Rishel, 1975) 表明如果仅有系统状态的部分信息, 即如果仅有带噪声的观测值

$$dZ_t=\theta_tX_tdt+\gamma_td\tilde{B}_t, \tag{11.2.38}$$

那么最优控制 $u^*(t,\omega)$ (要求是 $\mathcal{G}_t$ 适应的, 这里 $\mathcal{G}_t$ 是由 $\{Z_r;\ r\leqslant t\}$ 生成的 σ 代数) 为

$$u^*(t,\omega)=-D_t^{-1}M_t^TS_t\hat{X}_t(\omega), \tag{11.2.39}$$

这里 $\hat{X}_t$ 是 X_t 的基于观测值 $\{Z_r;\ r\leqslant t\}$ 的 Kalman-Bucy 滤波器 (6.3.3) 给出的滤波估计. 与 (11.2.36) 进行比较可知, 此时的随机控制问题可分解成一个线性滤波问题和一个确定性的控制问题.

随机控制理论的一个重要应用领域是经济学与金融学. 因此通过一个简单的最优证券组合多样化的例子来说明上述结果. 这个问题已有许多的作者做了更一般的考虑, 如文献 (Markowitz, 1976; Merton, 1971; Harrison, Pliska, 1981; Aase, 1984; Karatzas, Lehoczky, Shreve, 1987; Duffie, 1994) 及其参考文献.

例 11.2.5 (最优证券组合选择问题) 设 Z_t 表示某人在 t 时刻的财富, 假设这个人有两种不同的资产可供选择. 其中一种资产在 t 时刻的价格 $X_1(t)$ 满足方程:

$$\frac{dX_1(t)}{dt}=X_1(t)(a+\alpha W_t), \tag{11.2.40}$$

这里 W_t 表示白噪声, $a,\ \alpha>0$ 都为常数, 分别度量 $X_1(t)$ 的平均相对变化率和噪声的大小. 如早先所讨论的, 把 (11.2.40) 理解成 (Itô) 随机微分方程

$$dX_1(t)=X_1(t)adt+X_1(t)\alpha dB_t. \tag{11.2.41}$$

该项投资称为有风险的, 因为 $\alpha>0$. 假设另一个资产的价格 $X_0(t)$ 满足一个类似的方程, 但没有噪声:

$$dX_0(t)=X_0(t)bdt, \tag{11.2.42}$$

该项投资称为无风险的. 故假定 $b<a$ 是很自然的. 在每个瞬间 t, 该个体可选择他的财富的多大比例 $u(t)$ 去投资于风险资产, 于是投资于无风险资产的比例为 $1-u(t)$. 这样给出了关于财富 $Z_t=Z_t^u$ 的随机微分方程

$$\begin{aligned}dZ_t&=u(t)Z_tadt+u(t)Z_t\alpha dB_t+(1-u(t))Z_tbdt\\&=Z_t(au(t)+b(1-u(t)))dt+\alpha u(t)Z_tdB_t.\end{aligned} \tag{11.2.43}$$

假定在 s 时刻的初始财富 $Z_s=x>0$, 该投资者要求最大化其未来某一时刻 $t_0>s$ 的财富的期望效用. 如果不容许任何借 (即要求 $u(t)\leqslant 1$) 和卖空 (即要求 $u(t)\geqslant 0$), 同时假定效用函数为 $N:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $N(0)=0$ (通常假定为增函数且为凹函数). 问题是求 $\Phi(s,x)$ 和一个 (Markov) 控制 $u^*=u^*(t,Z_t)$, $0\leqslant u^*\leqslant 1$, 使得

$$\Phi(s,x)=\sup\{J^u(s,x);\ u\text{为 Markov 控制},\ 0\leqslant u\leqslant 1\}=J^{u^*}(s,x), \tag{11.2.44}$$

这里 $J^u(s,x)=E^{s,x}[N(Z^u_{\tau_G})]$, τ_G 是区域 $G=\{(r,z);\ r<t_0,\ z>0\}$ 的首次逸出时. 它具有 (11.1.6)/(11.1.8) 的形式及性能, 其中 $f=0$, $g=N$. 它的微分算子 L^v

有如下形式 (见 (11.2.2))

$$(L^v\phi)(t,x) = \frac{\partial \phi}{\partial t} + x(av + b(1-v))\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{2}\alpha^2 v^2 x^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \tag{11.2.45}$$

HJB 方程变为

$$\sup_v\{(L^v\Phi)(t,x)\} = 0, \quad (t,x) \in G \tag{11.2.46}$$

且

$$\Phi(t_0,x) = N(x), \quad \Phi(t,0) = N(0), \quad t < t_0. \tag{11.2.47}$$

于是, 对每个 (t,x), 试图找到值 $v = u(t,x)$ 使之最大化函数:

$$\eta(v) = L^v\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + x(b + (a-b)v)\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2}\alpha^2 v^2 x^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}. \tag{11.2.48}$$

如果 $\Phi_x := \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} > 0, \quad \Phi_{xx} := \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} < 0$, 则解为

$$v = u(t,x) = -\frac{(a-b)\Phi_x}{x\alpha^2\Phi_{xx}}. \tag{11.2.49}$$

如果把上式代入到 HJB 方程 (11.2.48), 可得到下面的关于 Φ 的非线性边界值问题:

$$\Phi_t + bx\Phi_x - \frac{(a-b)^2\Phi_x^2}{2\alpha^2\Phi_{xx}} = 0, \quad t < t_0, \quad x > 0, \tag{11.2.50}$$

$$\Phi(t,x) = N(x), \quad t = t_0 \text{ 或 } x = 0. \tag{11.2.51}$$

问题 (11.2.50), (11.2.51) 对一般的 N 是难以求解的. 有关增函数且为凹函数的一个重要例子是幂函数:

$$N(x) = x^\gamma, \quad 0 < \gamma < 1 \text{ 为常数}. \tag{11.2.52}$$

如果选择这样的效用函数 N, 猜想 (11.2.50), (11.2.51) 有如下形式的解:

$$\phi(t,x) = f(t)x^\gamma.$$

代入可得

$$\phi(t,x) = e^{\lambda(t_0-t)}x^\gamma, \tag{11.2.53}$$

这里 $\lambda = b\gamma + \dfrac{(a-b)^2\gamma}{2\alpha^2(1-\gamma)}$. 利用 (11.2.49) 可求得最优控制:

$$u^*(t,x) = \frac{a-b}{\alpha^2(1-\gamma)}, \tag{11.2.54}$$

如果 $\frac{a-b}{\alpha^2(1-\gamma)} \in (0,1)$, 由定理 11.2.2 知这是问题的解. 注意 u^* 事实上为常数.

另一个有趣的效用函数是 $N(x)=\log x$, 称为 Kelly 准则. 如 Aase(1984) 的注解, (在更一般的设置下) 可通过 Dynkin 公式计算 $E^{s,x}[\log(X_T)]$ 的值, 而直接地得到最优控制. 因为 $L^v(\log x) = av + b(1-v) - \frac{1}{2}\alpha^2 v^2$. 故

$$E^{s,x}[\log(Z_{\tau_G})] = \log x + E^{s,x}\left[\int_s^{\tau_G} \{au(t,Z_t) + b(1-u(t,Z_t)) - \frac{1}{2}\alpha^2 u^2(t,Z_t)\}dt\right],$$

显然, 对任意的 s, z, 选择 $u(s,z)$ 作为 v 的值使之最大化

$$av + b(1-v) - \frac{1}{2}\alpha^2 v^2,$$

即选择

$$v = u(t,Z_t) = \frac{(a-b)}{\alpha^2}, \quad \forall\, t, \omega, \tag{11.2.55}$$

则有 $J^u(s,x) = E^{s,x}[\log(Z_{\tau_G})]$ 是最大的. 此时 (11.2.55) 为最优控制. 类似地, 当 $N(x) = x^\gamma$ 时, 也可用直接的方法求最优控制 (见练习 11.8).

例 11.2.6 最后举一个例子, 它表明即使十分简单的随机控制问题都可能超出了在本章中达到的理论高度.

假设系统为 1 维的 Itô 积分:

$$dX_t = dX_t^u = u(t,\omega)dB_t, \quad t \geqslant s,\ X_s = x > 0. \tag{11.2.56}$$

考虑随机控制问题:

$$\Phi(t,x) = \sup_u E^{t,x}[K(X_{\tau_G}^u)], \tag{11.2.57}$$

这里 τ_G 是 $Y_t = (s+t, X_{s+t}^{s,x})$ 从区域 $G = \{(r,z);\ r \leqslant t_1,\ z > 0\}$ 的首次逸出时. K 是给定的有界连续函数.

直观上, 可把该系统看作为一个对策的状态, 它像一个"已激发的"布朗运动. 这里在每个瞬间能控制这个激发的大小 u, 控制的目的是最大化该对策在将来的固定时刻 t_1 的期望收益 $K(X_{t_1})$.

假设 $\Phi \in C^2$ 及 u^* 存在, HJB(I) 方程为

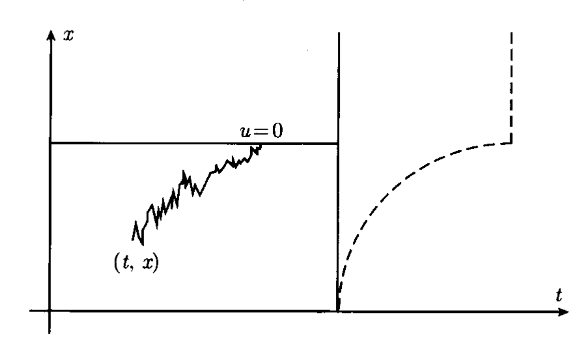
$$\sup_{v\in\mathbf{R}} \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right\} = 0, \quad t < t_1, \quad \Phi(t_1,x) = K(x), \tag{11.2.58}$$

由上知必有

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \leqslant 0, \quad v^* \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad t < t_1, \tag{11.2.59}$$

这里 v^* 是 $v \in \mathbf{R}$ 中使 (11.2.58) 中的上确界达到的 v 的值. 但如果 $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$, 那么 $\Phi(t,x) = \Phi(t_1,x) = K(x)$. 然而, 因为没有假定 $\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} \leqslant 0$, 事实上, K 甚至没有假定为可微的, 因此它一般不可能为解.

到底哪儿出了错呢? 由于 HJB 方程 (I) 的结论是错的, 从而它的假设条件不成立. 于是 Φ 不属于 C^2 或 u^* 不存在, 或二者皆不成立.



为了简化问题, 假定

$$K(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

利用直觉发现, 如果 X_t 在带型域 $0 < x < 1$ 内, 则最优的激发是尽可能的大, 以避免从 G 中的 $\{t_1\} \times (0,1)$ 处逸出 G. 利用 X_t 刚好是布朗运动的一个时变 (见第 8 章), 得出这个最优控制导出了过程 X^*. 如果初始值 $x \in (0,1)$, 它以 x 的概率马上跳跃到 1, 以 $(1-x)$ 的概率跳跃到 0. 如果初始值 $x \in [1,\infty)$, 简单地选择控制 $u = 0$ 即可. 换句话说, 探索性地有

$$u^*(t,x) = \begin{cases} \infty, & \text{如果 } x \in (0,1), \\ 0, & \text{如果 } x \in [1,\infty). \end{cases} \tag{11.2.60}$$

相应的期望收益为

$$\phi^*(s,x) = E^{s,x}[K(X^*_{t_1})] = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & x > 1, \end{cases} \tag{11.2.61}$$

于是这个候补的最优控制 u^* 是不连续的 (甚至不是有限的), 相应的最优过程 X_t^* 不是 Itô 扩散 (甚至不连续). 因此从数学上处理这种情形时, 必须扩大容许控制族的范围 (相应的过程范围也要扩大). 例如, 可以证明定理 11.2.2 的一个扩张定理, 它可得出上面的 u^* 比其他任何 Markov 控制 u 都不会差. 而 (11.2.61) 得出的 ϕ^* 与 (11.2.57) 定义的最大期望收益 Φ 是一致的.

上面的例子说明了最优控制 u^* 及相应的随机微分方程 (11.1.1) 的解的存在性问题的重要性. 在这方面简要地概括某些结果:

在关于 b, σ, f, g, α, ∂G 的确定的条件下. 假定控制值的集是紧的, 利用非线性偏微分方程的一般结果, 可以证明存在光滑函数 ϕ 使得

$$\sup_v \{f^v(y) + (L^v\phi)(y)\} = 0, \quad y \in G$$

且

$$\phi(y) = g(y), \quad y \in \partial G,$$

然后由可测的选择定理, 可找到一个可测函数 $u^*(y)$ 使得

$$f^{u^*}(y) + (L^{u^*}\phi)(y) = 0 \tag{11.2.62}$$

对几乎所有的 $y \in G$(相对于 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的 Lebesgue 测度) 成立. 即使仅知道 u^* 是可测的, 也可证明 (11.1.1) 相应的解 $X_t = X_t^{u^*}$ 存在 (这方面的一般结果见文献 (Stroock, Varadham, 1979)). 最后可通过定理 11.2.2 的证明看出只需令 (11.2.62) 在 G 的某个子集上满足, 而该子集在 G 中余集的 Green 测度为 0(见定义 9.3.4) 即可. 在关于 b 和 σ 的一些适当的条件下, 可证明 Green 测度相对于 Lebesgue 测度是绝对连续的. 因此, 由 (11.2.62) (及定理 11.2.2 的扩张版) 可知 u^* 是最优控制. 更详细和更深一步的研究, 读者可参考文献 (Fleming, Rishel, 1975; Bensoussan, Lions, 1978; Dynkin, Yushkevich,1979; Krylov,1980).

11.3 带终端条件的随机控制问题

在许多应用上, 对 Markov 控制 u 的一些约束被考虑进来, 例如, 在终端时刻 $t = T$, Y_t^u 的概率性表现. 这样的问题常常可用 Lagrange 乘数法来处理, 描述如下.

考虑问题: 求 $\Phi(y)$ 和 $u^*(y)$ 使得

$$\Phi(y) = \sup_{u \in \mathcal{K}} J^u(y) = J^{u^*}(y), \tag{11.3.1}$$

这里

$$J^u(y) = E^y\Big[\int_0^{\tau_G} f^u(Y_t^u)dt + g(Y_{\tau_G}^u)\Big], \tag{11.3.2}$$

上确界是取遍空间 $\mathcal{K}$. 而 $\mathcal{K}$ 是由所有满足下述条件的 Markov 控制 u 构成的集合: $u:\ \mathbf{R}^{n+1} \to U \subset \mathbf{R}^n$, 使得

$$E^y[M_i(Y_{\tau_G}^u)] = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, l, \tag{11.3.3}$$

其中 $M = (M_1, \cdots, M_l):\ \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^l$ 为给定的连续函数, 且

$$E^y[|M(Y^u_{\tau_G})|] < \infty, \quad \forall\, y,\ u, \tag{11.3.4}$$

这里当 $\tau_G(\omega) = \infty$ 时, 规定 $g(Y_{\tau_G}(\omega)) = 0$.

现在, 引入一个相关的但不带约束的问题: 对每个 $\lambda \in \mathbf{R}^l$ 及每个 Markov 控制 u, 定义

$$J^u_\lambda(y) = E^y\Big[\int_0^{\tau_G} f^u(Y^u_t)dt + g(Y^u_{\tau_G}) + \lambda \cdot M(Y^u_{\tau_G})\Big], \tag{11.3.5}$$

这里 $\cdot$ 表示 $\mathbf{R}^l$ 中的内积. 求 $\Phi_\lambda(y)$ 和 $u^*_\lambda(y)$ 使得

$$\Phi_\lambda(y) = \sup_u J^u_\lambda(y) = J^{u^*_\lambda}_\lambda(y), \tag{11.3.6}$$

它没有终端条件.

定理 11.3.1　假设对任意的 $\lambda \in \Lambda \subset \mathbf{R}^l$, 能找到 $\Phi_\lambda(y)$ 和 u^*_λ 解 (无约束的) 随机控制问题 (11.3.5)~(11.3.6). 更进一步, 假定存在 $\lambda_0 \in \Lambda$ 使得

$$E^y[M(Y^{u^*_{\lambda_0}}_{\tau_G})] = 0, \tag{11.3.7}$$

那么 $\Phi(y) := \Phi_{\lambda_0}(y)$ 及 $u^* := u^*_{\lambda_0}$ 是带约束的随机控制问题 (11.3.1)~(11.3.3) 的解.

证明　设 u 为 Markov 控制, $\lambda \in \Lambda$, 那么由 u^*_λ 的定义可知

$$\begin{aligned}E^y\Big[\int_0^{\tau_G} f^{u^*_\lambda}(Y^{u^*_\lambda}_t)dt + g(Y^{u^*_\lambda}_{\tau_G}) + \lambda \cdot M(Y^{u^*_\lambda}_{\tau_G})\Big] = J^{u^*_\lambda}_\lambda(y)\\ \geqslant J^u_\lambda(y) = E^y\Big[\int_0^{\tau_G} f^u(Y^u_t)dt + g(Y^u_{\tau_G}) + \lambda \cdot M(Y^u_{\tau_G})\Big],\end{aligned} \tag{11.3.8}$$

特别, 如果 $\lambda = \lambda_0,\ \ u \in \mathcal{K}$. 那么

$$E^y[M(Y^{u^*_{\lambda_0}}_{\tau_G})] = 0 = E^y[M(Y^u_{\tau_G})],$$

因此, 由 (11.3.8) 有

$$J^{u^*_{\lambda_0}}(y) \geqslant J^u(y), \quad \forall\, u \in \mathcal{K},$$

由于 $u^*_{\lambda_0} \in \mathcal{K}$, 故定理得证.

该结果的一个应用见练习 11.11.

练　习

11.1. 对下面的问题, 写出它的 HJB 方程:

$$\Psi(s,x) = \inf_u E^{s,x}\Big[\int_0^\infty e^{-\alpha(s+t)}(\theta(X_t) + u_t^2)dt\Big],$$

这里

$$dX_t = u_t dt + dB_t, \quad X_t, u_t, B_t \in \mathbf{R},$$

$\alpha > 0$ 为常数, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 为给定的有界连续函数. 证明: 如果 Ψ 满足定理 11.2.1 的条件及 u^* 存在, 那么

$$u^*(t,x) = -\frac{1}{2}e^{\alpha t}\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

11.2. 考虑随机控制问题

$$\Psi_0(s,x) = \inf_u E^{s,x}\Big[\int_s^\infty e^{-\rho t} f_0(u_t, X_t)dt\Big],$$

这里

$$dX_t = dX_t^u = b(u_t, X_t)dt + \sigma(u_t, X_t)dB_t, \quad X_t \in \mathbf{R}^n, \ u_t \in \mathbf{R}^k, \ B_t \in \mathbf{R}^m,$$

f_0 是一个给定的有界连续实函数, $\rho > 0$. 下确界是取遍所有的时齐 Markov 控制 u, 即控制 $u = u(X_t)$. 证明:

$$\Psi_0(s,x) = e^{-\rho s}\xi(x), \quad \xi(x) = \Psi(0,x).$$

提示: 由 $E^{s,x}$ 的定义, 有

$$E^{s,x}\Big[\int_s^\infty e^{-\rho t} f_0(u_t, X_t)dt\Big] = E\Big[\int_0^\infty e^{-\rho(s+t)} f_0(u(X_{s+t}^{s,x}), X_{s+t}^{s,x})dt\Big],$$

这里 E 表示相对于 P 的期望.

11.3. 定义

$$dX_t = ru_t X_t dt + \alpha u_t X_t dB_t, \quad X_t, \ u_t, \ B_t \in \mathbf{R}$$

且

$$\Phi(s,x) = \sup_u E^{s,x}\Big[\int_0^\infty e^{-\rho(s+t)} f_0(X_t)dt\Big],$$

这里 r, α, ρ 都是常数, $\rho > 0$, f 为有界连续的实函数.

假定 Φ 满足定理 11.2.1 的条件且最优 Markov 控制 u^* 存在.

a) 证明

$$\sup_{v\in\mathbf{R}}\Big\{e^{-\rho t}f(x) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + rvx\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2}\alpha^2 v^2 x^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\Big\} = 0.$$

推导

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \leqslant 0.$$

b) 假定 $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} < 0$, 证明:

$$u^*(t,x) = -\frac{r\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}}{\alpha^2 x \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}}$$

且

$$2\alpha^2\Big(e^{-\rho t}f_0(x)+\frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-r^2\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big)^2=0.$$

c) 假定 $\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=0$, 证明 $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=0$, 且

$$e^{-\rho t}f_0(x)+\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0.$$

d) 假如 $u_t^*=u^*(X_t)$, 且 b) 成立. 证明 $\Phi(t,x)=e^{-\rho t}\xi(x)$, 且

$$2\alpha^2(f_0-\rho\xi)\xi''-r^2(\xi')^2=0.$$

见练习 11.2.

11.4. 定理 11.2.1 中的假设经常不满足 (见练习 11.10), 故在此情形下能得出一些结果也是很有用的. 例如定理 11.2.3 一样, 定义 Φ_a, 那么不需假定 u^* 存在, 也无需假定 Φ 的光滑性条件, 由 Bellman 原理 (与 (11.2.6) 和 (11.2.7) 进行比较)

$$\Phi_a(y)=\sup_u E^y\Big[\int_0^\alpha f^u(Y_r^u)dr+\Phi_a(Y_\alpha^u)\Big],$$

任意的 $y\in G$ 和任意的停时 $\alpha\leqslant\tau_G$. 上确界是取遍所有 $\mathcal{F}_t^{(m)}$ 适应控制 u (见文献 (Krylov, 1980, 第 150 页定理 6)). 如果 $\Phi_a\in C^2(G)$, 推导

$$f^v(y)+L^v\Phi_a(y)\leqslant 0,\quad \forall\, y\in G,\ v\in U.$$

11.5. 假定在 (11.1.8) 中 $f=0$, 且最优的 Markov 控制 u^* 存在. 证明: 对任意的 Markov 控制 u, 函数 Φ 相对于过程 Y_t^u 在 G 内是上调和的. 提示: 见 (11.2.6), (11.2.7).

11.6.* 设 X_t 表示在 t 时刻的财富, 假定在任何时刻 t, 可以在两种投资之间进行选择:

1) 一个风险投资, 它的单位价格 $X_1(t)=X_1(t,\omega)$ 满足方程

$$dX_1(t)=a_1X_1(t)dt+\sigma_1X_1(t)dB_t.$$

2) 一个相对安全的投资, 它的单位价格 $X_0(t)=X_0(t,\omega)$ 满足

$$dX_0(t)=a_0X_0(t)dt+\sigma_0X_0(t)d\tilde{B}_t,$$

这里 a_i, σ_i 都为常数, 且 $a_1>a_0$, $\sigma_1>\sigma_0$, B_t, $\tilde{B}_t$ 是相互独立的 1 维布朗运动.

a) 设 $u(t,\omega)$ 表示在 t 时刻, 财产 $Z_t(\omega)$ 投资于高风险资产的比例, 证明

$$\begin{aligned}dZ_t=dZ_t^u=&Z_t(a_1u(t)+a_0(1-u(t)))dt\\&+Z_t(\sigma_1u(t)dB_t+\sigma_0(1-u(t))d\tilde{B}_t).\end{aligned}$$

b) 假如 u 是一个 Markov 控制, $u=u(t,Z_t^u)$, 求 (t,Z_t^u) 的生成元 A^u.

c) 对随机控制问题:

$$\Phi(s,x)=\sup_u E^{s,x}[(Z_{\hat{\tau}}^{(u)})^\gamma],$$

这里 $\hat{\tau} = \min(t_1 - s, \tau_0)$, $\tau_0 = \inf\{t > 0;\ X_t = 0\}$, t_1 是给定的未来某一时刻 (常数), $\gamma \in (0,1)$ 是常数, 写出它的 HJB 方程.

d) 对 c) 中的问题, 求最优控制 u^*.

11.7.* 考虑随机控制问题:

$$(\text{系统})\quad dX_t = au(t)dt + u(t)dB_t;\quad X_0 = x > 0,$$

这里 $B_t \in \mathbf{R}$, $u(t) \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{R}$ 为给定的常数, 且

$$\Phi(s,x) = \sup_u E^{s,x}[(X_{\hat{\tau}})^\gamma],$$

这里 $0 < \gamma < 1$ 为常数且

$$\hat{\tau} = \inf\{t > 0;\ X_t = 0\} \wedge (T - s),$$

T 为给定的将来时间 (常数).

证明: 这个问题有最优控制

$$u^*(t,x) = \frac{ax}{1-\gamma},$$

相应的最优性能函数 (值函数) 为

$$\Phi(s,x) = x^\gamma \exp\left(\frac{a^2(t_1 - s)\gamma}{2(1-\gamma)}\right).$$

11.8. 利用 Dynkin 公式直接证明例 11.2.5 中问题的最优控制是

$$u^*(t,x) = \min\left(\frac{a-b}{\alpha^2(1-\gamma)},\ 1\right),$$

其中效用函数 $N(x) = x^\gamma$. 提示: 见 (11.2.55) 的论证.

11.9. 在 Beneš(1974) 中考虑了下面的随机控制问题:

$$\Psi(s,x) = \inf_u E^{s,x}\left[\int_0^\infty e^{-\rho(s+t)} X_t^2 dt\right],$$

这里

$$dX_t = dX_t^{(u)} = au_t dt + dB_t,\quad X_t,\ B_t \in \mathbf{R},$$

a, ρ 是 (已知) 常数, $\rho > 0$. 这里控制 u 的取值范围为 $U = [-1,1]$.

a) 证明该问题的 HJB 方程为

$$\inf_{v\in[-1,1]}\left\{e^{-\rho s}x^2 + \frac{\partial\Psi}{\partial s} + av\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right\} = 0.$$

b) 如果 $\Phi \in C^2$ 且 u^* 存在, 证明:

$$u^*(x) = -\text{sign}(ax),$$

这里

$$\text{sign } z = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ -1, & z \leqslant 0. \end{cases}$$

提示：解释为什么 $x > 0 \Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial x} > 0$, $x < 0 \Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial x} < 0$.

11.10. 设

$$f_0(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \sqrt{x}, & x > 1. \end{cases}$$

记

$$J^u(s,x) = E^{s,x}\Big[\int_0^{\tau_0} e^{-\rho(s+t)} f_0(X_t^u)dt\Big], \quad \Phi(s,x) = \sup_u J^u(s,x),$$

这里

$$dX_t = u_t dB_t, \quad t \geqslant 0,$$

其中 $B_t \in \mathbf{R}$, 控制值 $u_t \in \mathbf{R}$.

$$\tau_0 = \inf\{t > 0;\ X_t^u \leqslant 0\}.$$

a) 定义

$$\phi(s,x) = \frac{1}{\rho} e^{-\rho s} \hat{f}(x), \quad x \geqslant 0,\ s \in \mathbf{R},$$

这里

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \sqrt{x}, & x > 1. \end{cases}$$

证明：对任意的 s, x 和任意的 (有限)Markov 控制 u:

$$J^u(s,x) \leqslant \phi(s,x).$$

提示：记 $\phi_1(s,x) = \frac{1}{\rho} e^{-\rho s} x$, $\forall\ s,\ x$ 及 $\phi_2(s,x) = \frac{1}{\rho} e^{-\rho s}\sqrt{x}$, $\forall\ s,\ x$. 那么由定理 11.2.2 有

$$J^u(s,x) \leqslant \phi_i(s,x), \quad i = 1, 2.$$

b) 证明 $\Phi(s,x) = \phi(s,x)$. 提示：考虑 $J^{u_k}(s,x)$, 这里

$$u_k(x) = \begin{cases} k, & 0 \leqslant x < 1, \\ 0, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

再令 $k \to \infty$. 因此 u^* 不存在, 且 Φ 不在 C^2 中, 此时 HJB(I) 方程的两个条件都不成立.

11.11.* 考虑例 11.2.4 随机线性调节器问题的 1 维情形：

$$\Psi(s,x) = \inf_{u \in \mathcal{K}} E^{s,x}\Big[\int_0^{t_1 - s} ((X_r^u)^2 + \theta u_r^2)dr\Big], \tag{11.3.9}$$

这里

$$dX_t^u = u_t dt + \sigma dB_t, \quad t \geqslant 0, \quad X_0 = x,$$

u_t, $B_t \in \mathbf{R}$, σ, θ 及 t 都为常数, $\theta > 0$, $t_1 > 0$. 下确界是取遍空间 $\mathcal{K}$, 其中 $\mathcal{K}$ 是由满足下面条件的所有 Markov 控制 u 构成的:

$$E^{s,x}[(X_{t_1-s}^u)^2] = m^2, \quad m \text{ 为常数}, \tag{11.3.10}$$

利用定理 11.3.1 解该问题. 提示: 对每个 $\lambda \in \mathbf{R}$, 解无约束问题:

$$\Psi_\lambda(s,x) = \inf_{u \in \mathcal{K}} E^{s,x}\Big[\int_0^{t_1-s}((X_r^u)^2 + \theta u_r^2)dr + \lambda(X_{t_1-s}^u)^2\Big],$$

先求最优控制 u_λ^*. 然后试求 λ_0 使得

$$E^{s,x}[(X_{t_1-s}^{u_{\lambda_0}^*})^2] = m^2.$$

11.12.* 解随机控制问题:

$$\Psi(s,x) = \inf_u J^u(s,x) = J^{u^*}(s,x),$$

这里

$$J^u(s,x) = E^{s,x}\Big[\int_0^\infty e^{-\rho(s+t)}(X_t^2 + \theta u_t^2)dt\Big],$$
$$dX_t = u_t dt + \sigma dB_t,$$

其中 u_t, $B_t \in \mathbf{R}$, 且 $\sigma \in \mathbf{R}$, $\rho > 0$, $\theta > 0$ 都为常数. 提示: 试用 $\psi(s,x) = e^{-\rho s}(ax^2 + b)$, a, b 为适当的常数, 再应用定理 11.2.2.

11.13.* 考虑随机控制问题:

$$\Phi(s,x) = \sup_u E^{s,x}\Big[\int_0^\tau e^{-\rho(s+t)}u_t dt\Big],$$

这里 (1 维) 系统 X_t 由下式给出:

$$dX_t = dX_t^u = (1 - u_t)dt + \sigma dB_t,$$

$\rho > 0$, $\sigma \neq 0$ 为常数, 控制 $u_t = u_t(\omega)$ 可假定为 $U = [0,1]$ 中的任何值. $\tau = \inf\{t > 0;\ X_t^u \leqslant 0\}$ (破产时间). 证明: 如果 $\rho \geqslant \frac{2}{\sigma^2}$, 那么最优控制为

$$u_t^* = 1, \quad \forall\, t,$$

相应的值函数为

$$\Phi(s,x) = e^{-\rho s}\frac{1}{\rho}\Big(1 - \exp\Big(-\sqrt{\frac{2}{\sigma^2}}x\Big)\Big), \quad x \geqslant 0.$$

11.14. 下面的问题是例 11.2.5 的消费累加的无限水平的情形. 假定市场上有两种可供投资的资产:

(i) 债券, 在 t 时刻的它的价格 $X_0(t)$ 满足:

$$dX_0(t) = \rho X_0(t)dt, \quad X_0(0) = 1, \quad \rho \geqslant 0 \text{ 为常数}.$$

(ii) 股票, 在 t 时刻它的价格 $X_1(t)$ 满足:

$$dX_1(t) = \mu X_1(t)dt + \sigma X_1(t)dB(t), \quad X_1(0) = x > 0,$$

这里 μ, σ 都为常数, $\sigma \neq 0$.

设 $Y_0(t), Y_1(t)$ 分别表示某代理者在 t 时刻投资于债券与股票上钱的数量. 假如代理者在任何时刻都可选择他的消费率 $c(t) = c(t,\omega) \geqslant 0$, 及他的总财富投资于股票的比率:

$$u(t) = u(t,\omega) = \frac{Y_1(t)}{Y_0(t) + Y_1(t)}.$$

假设 $u(t)$ 和 $c(t)$ 都是 $\mathcal{F}_t$- 适应过程, 总财富 $Z(t) = Y_0(t) + Y_1(t)$ 的动态变化如下:

$$dZ(t) = Z(t)[\{\rho(1-u(t)) + \mu u(t) - c(t)\}dt + \sigma u(t)dB(t)], \quad Z(0) = z > 0.$$

考虑问题: 求 Φ, c^*, u^* 使得

$$\Phi(s,z) = \sup_{c,u} J^{c,u}(s,z) = J^{c^*,u^*}(s,z),$$

这里

$$J^{c,u}(s,z) = E^{s,z}\Big[\int_0^{\tau_0} e^{-\delta(s+t)}\frac{c^\gamma(t)}{\gamma}dt\Big],$$

其中 $\delta > 0$, $\gamma \in (0,1)$ 都为常数.

$$\tau_0 = \inf\{t > 0;\ Z(t) \leqslant 0\} \leqslant \infty \quad (\text{破产时间}).$$

利用定理 11.2.2 证明: 在某些条件下有

$$\Phi(s,z) = Ke^{-\delta s}z^\gamma,$$

K 为确定的常数. 求 K 的值并由此求出最优消费率 $c^*(t)$ 和最优证券组合 $u^*(t)$.

第 12 章　在数理金融学中的应用

12.1　市场, 证券组合和套利

在本章描述怎样应用前面章节中的概念、方法和结果来给出金融中的严格的数学模型, 并将集中精力于最基本的问题及和本书中的理论紧密相关的课题. 强调本章仅打算对这个激动人心的科目给出一个简短的介绍. 它在最近数十年间有飞速的发展, 并且毫无减慢步伐的征兆. 关于更多的全面综合的论述, 见文献 (Benth, 2004; Bingham, Kiesel, 1998; Elliott, Kopp, 2005; Duffie, 1996; Karatzas, 1997; Karatzas, Shreve, 1998; Shreve, 2004; Lamberton, Lapeyre, 1996; Musiela, Rutkowski, 1997; Kallianpur, Karandikar, 2000; Merton, 1990; Shiryaev, 1999) 及其引用的参考文献.

首先, 给出一些基本金融概念的数学定义. 指出对其他的数学模型事实上也进行了积极的研究. 它们包括更一般的 (可能不连续的) 半鞅 (Barndorff-Nielsen, 1998; Eberlein, Keller, 1995; Schoutens, 2003; Cont, Tankov, 2004; ØKsendal, Sulem, 2007). 甚至不是半鞅的模型 (Cutland, Kopp, Willinger, 1995, Lin, 1995; Rogers, 1997; Hu, Øksendal, 2003; Elliott, VanderHoek, 2003; Biagini, Økisendal, 2005; Øksendal, 2005; DiNunno et al., 2006; Biagini et al., 2007).

定义 12.1.1　a) 一个市场是一个 $\mathcal{F}_t^{(m)}$ 适应的 $(n+1)$ 维 Itô 过程: $X_t = (X_0(t), X_1(t), \cdots, X_n(t)),\quad 0 \leqslant t \leqslant T$. 假定形式如下:

$$dX_0(t) = \rho(t,\omega)X_0(t)dt, \quad X_0(0) = 1, \tag{12.1.1}$$

$$\begin{aligned} dX_i(t) &= \mu_i(t,\omega)dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(t,\omega)dB_j(t) \\ &= \mu_i(t,\omega)dt + \sigma_i(t,\omega)dB(t), \quad X_i(0) = x_i, \end{aligned} \tag{12.1.2}$$

这里 σ_i 是 $n \times m$ 阶矩阵 $[\sigma_{ij}]$ 的第 i 行, $1 \leqslant i \leqslant n \in \mathbf{N}$.

b) 市场 $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ 称为规范的, 如果 $X_0(t) \equiv 1$.

c) 市场 $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ 中的一个证券组合是一个 $(n+1)$ 维 (t,ω) 可测且 $\mathcal{F}_t^{(m)}$ 适应的随机过程:

$$\theta(t,\omega) = (\theta_0(t,\omega), \theta_1(t,\omega), \cdots, \theta_n(t,\omega)), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{12.1.3}$$

d) 在 t 时刻证券组合 $\theta(t)$ 的值定义为

$$V(t,\omega)=V^{\theta}(t,\omega)=\theta(t)\cdot X(t)=\sum_{i=0}^{n}\theta_i(t)X_i(t), \tag{12.1.4}$$

这里 · 表示 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的内积.

e) 证券组合 $\theta(t)$ 称为自筹资的, 如果

$$\int_0^T\left\{|\theta_0(s)\rho(s)X_0(s)+\sum_{i=1}^{n}\theta_i(s)\mu_i(s)|+\sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{n}\theta_i(s)\sigma_{ij}(s)\right]^2\right\}ds<\infty,\ \text{a.s.} \tag{12.1.5}$$

且

$$dV(t)=\theta(t)\cdot dX(t), \tag{12.1.6}$$

即

$$V(t)=V(0)+\int_0^t\theta(s)\cdot dX(s),\quad t\in[0,T]. \tag{12.1.7}$$

附注 a) 考虑 $X_i(t)=X_i(t,\omega)$ 作为 t 时刻证券/资产 i 的价格. 资产 $1,2,\cdots,n$ 称为是有风险的, 因为它们出现了扩散项, 它们可代表股票投资. 资产 0 称为无风险的, 因为它缺少扩散项 (尽管 $\rho(t,\omega)$ 可能依赖于 ω), 该资产可看作在银行的投资. 为简单起见, 假定 $\rho(t,\omega)$ 是有界的.

b) 注意通过下面的定义总可使市场为规范的

$$\bar{X}_i(t)=X_0(t)^{-1}X_i(t),\quad 1\leqslant i\leqslant n, \tag{12.1.8}$$

市场 $\bar{X}(t)=(1,\bar{X}_1(t),\cdots,\bar{X}_n(t))$ 称为 $X(t)$ 的规范化.

规范化相当于把安全资产的价格 $X_0(t)$ 看作单位价格 (计价物), 且依据这个去计算其他资产的价格. 因为

$$X_0(t)=\exp\Big(\int_0^t\rho(s,\omega)ds\Big),$$

可得

$$\xi(t):=X_0^{-1}(t)=\exp\Big(-\int_0^t\rho(s,\omega)ds\Big)>0,\quad\forall\, t\in[0,T], \tag{12.1.9}$$

$$d\bar{X}_i(t)=d(\xi(t)X_i(t))=\xi(t)[(\mu_i-\rho X_i)dt+\sigma_i dB(t)],\quad 1\leqslant i\leqslant n \tag{12.1.10}$$

或

$$d\bar{X}(t)=\xi(t)[dX(t)-\rho(t)X(t)dt]. \tag{12.1.11}$$

c) 分量 $\theta_0(t,\omega),\cdots,\theta_n(t,\omega)$ 表示投资者在 t 时刻分别持有证券 $0,1,2,\cdots,n$ 的单位数量.

d) 即投资者在 t 时刻持有的所有资产的总值.

e) 注意条件 (12.1.5) 是要求使 (12.1.7) 有意义, 见定义 3.3.2.

定义 12.1.1 的 e) 部分代表了数学模型的精妙之处. 如果 $\theta(t)$ 也是 Itô 过程, 那么由 Itô 公式 (12.1.4) 可导出

$$dV(t)=\theta(t)\cdot dX(t)+X(t)\cdot d\theta(t)+d\theta(t)\cdot dX(t).$$

然而 (12.1.6) 却是从相应的离散时间模型给出. 如果投资 $\theta(t_k)$ 是在离散时间 $t=t_k$ 作出的, 那么财富的增量 $\Delta V(t_k)=V(t_{k+1})-V(t_k)$ 应为

$$\Delta V(t_k)=\theta(t_k)\cdot\Delta X(t_k), \tag{12.1.12}$$

这里 $\Delta X(t_k)=X(t_{k+1})-X(t_k)$ 是价格的变化, 此处假定在系统中没有其他的钱投入, 也不抽出其中的钱, 即是自筹资的. 当 $\Delta t_k=t_{k+1}-t_k$ 趋于 0 时, 连续时间模型可看成离散时间情形的极限, 那么 (12.1.6)(及其 Itô 积分) 可从 (12.1.12) 得出.

f) 注意, 如果对 X_t, θ 是自筹资的, 且

$$\bar{V}^\theta(t)=\theta(t)\cdot\bar{X}(t)=\xi(t)V^\theta(t) \tag{12.1.13}$$

是规范化市场的值过程, 那么由 Itô 公式及 (12.1.11) 有

$$\begin{aligned}d\bar{V}^\theta(t)&=\xi(t)dV^\theta(t)+V^\theta(t)d\xi(t)\\&=\xi(t)\theta(t)dX(t)-\rho(t)\xi(t)V^\theta(t)dt\\&=\xi(t)\theta(t)[dX(t)-\rho(t)X(t)dt]\\&=\theta(t)d\bar{X}(t),\end{aligned} \tag{12.1.14}$$

因此 θ 也是规范化市场中自筹资的.

附注 结合 (12.1.4) 和 (12.1.6) 有

$$\theta_0(t)X_0(t)+\sum_{i=1}^n\theta_i(t)X_i(t)=V^\theta(0)+\int_0^t\theta_0(s)dX_0(s)+\sum_{i=1}^n\int_0^t\theta_i(s)dX_i(s), \tag{12.1.15}$$

假定 $\theta_0(t)$ 为一个 Itô 过程, 记 $Y_0(t)=\theta_0(t)X_0(t)$, 则有

$$dY_0(t)=\rho(t)Y_0(t)dt+dA(t),$$

这里

$$A(t)=\sum_{i=1}^n\left(\int_0^t\theta_i(s)dX_i(s)-\theta_i(t)X_i(t)\right). \tag{12.1.16}$$

由此解得

$$\xi(t)Y_0(t) = \theta_0(0) + \int_0^t \xi(s)dA(s)$$

或

$$\theta_0(t) = \theta_0(0) + \int_0^t \xi(s)dA(s).$$

利用分部积分, 上式可重写为

$$\theta_0(t) = \theta_0(0) + \xi(t)A(t) - A(0) - \int_0^t A(s)d\xi(s)$$

或

$$\theta_0(t) = V^\theta(0) + \xi(t)A(t) + \int_0^t \rho(s)A(s)\xi(s)ds, \tag{12.1.17}$$

反过来也成立. 它意味着如果按 (12.1.17) 定义 $\theta_0(t)$ (它是一个 Itô 过程), 那么 (12.1.15) 成立.

于是, 如果 $\theta_1(t), \cdots, \theta_n(t)$ 已选择, 总能按 (12.1.17) 选择 $\theta_0(t)$ 使得证券组合 $\theta(t) = (\theta_0(t), \theta_1(t), \cdots, \theta_n(t))$ 是自筹资的, 而且可自由选择证券组合的初始值 $V^\theta(0)$.

定义 12.1.2　一个满足 (12.1.5) 的自筹资证券组合 $\theta(t)$, 如果它相应的值过程 $V^\theta(t)$ 关于 (t,ω) 是 a.s. 下有界的, 即存在 $K = K(\theta) < \infty$, 使得

$$V^\theta(t,\omega) \geqslant -K, \quad 对\text{a.a. } (t,\omega) \in [0,T] \times \Omega, \tag{12.1.18}$$

则称它为容许的. 这类似于 Karatzas (1996) 书中的驯顺的证券组合. 限制条件 (12.1.18) 反映了真实金融中自然条件: 一定存在一个借贷者能够忍受的极限值. 见例 12.1.4.

定义 12.1.3　一个容许的证券组合 $\theta(t)$ 称为一个套利 (在市场 $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ 中), 如果它相应的值过程 $V^\theta(t)$ 满足 $V^\theta(0) = 0$, 且

$$V^\theta(T) \geqslant 0 \;\text{ a.s.}, \quad 且 P[V^\theta(T) > 0] > 0.$$

换句话说, 证券组合 $\theta(t)$ 从时间 $t = 0$ 到 $t = T$, 如果它的值几乎必然地增加且有一个正的概率使它严格地增加, 则 $\theta(t)$ 是一个套利. 因为 $\theta(t)$ 产生了利润而没有亏损的风险.

直观上, 套利的存在是市场缺乏均衡的信号: 如果存在套利, 在长期运行中不可能存在真正的市场均衡. 因此, 对一个给定的市场, 能确定它是否存在套利是很重要的. 毫不奇怪, 这个问题与对证券组合施加什么条件是紧密相连的. 在上面定义了容许的证券组合, 条件 (12.1.8) 是从建模的观点出发而做的. 用其他条件代替它, 比如 L^2 条件

$$E_Q\Big[\int_0^T \sum_{i=1}^n |\theta_i(t)\sigma_i(t)|^2 dt\Big] < \infty, \tag{12.1.19}$$

这里 Q 是引理 12.2.3 中定义的概率测度, 也可得到一个数学上合理的理论.

在任何情形下, 对自筹资证券组合都会附加一些其他的条件, 如果仅要求证券组合是自筹资的 (满足 (12.1.5)), 则如下面的例子所说明的那样, 实际上可得到任意的终端值 $V(T)$.

例 12.1.4 考虑下面的市场:

$$dX_0(t) = 0, \quad dX_1(t) = dB(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T = 1.$$

设

$$Y(t) = \int_0^t \frac{dB(s)}{\sqrt{1-s}}, \quad 0 \leqslant t < 1.$$

由推论 8.5.5 知, 存在一个布朗运动 $\hat{B}(t)$ 使得

$$Y(t) = \hat{B}(\beta_t),$$

这里

$$\beta_t = \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{1-s}} = \ln\Big(\frac{1}{1-t}\Big), \quad 0 \leqslant t < 1.$$

设 $M < \infty$ 为给定的常数, 定义

$$\tau := \tau_M := \inf\{t > 0;\ \hat{B}(t) = M\},$$
$$\alpha := \alpha_M := \inf\{t > 0;\ Y(t) = M\},$$

那么 $\tau < \infty$ a.s. (练习 7.4 a)), 且 $\tau = \ln\Big(\dfrac{1}{1-\alpha}\Big)$, 因此 $\alpha < 1$ a.s., 定义

$$\theta_1(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}, & 0 \leqslant t < \alpha, \\ 0, & \alpha \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

按 (12.1.17) 选择 $\theta_0(t)$, 且使 $V(0) = 0$, 那么 $\theta(t) = (\theta_0(t), \theta_1(t))$ 是自筹资的, 相应的值过程为

$$V(t) = \int_0^{t\wedge\alpha} \frac{dB(s)}{\sqrt{1-s}} = Y(t\wedge\alpha), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

特别

$$V(1) = Y(\alpha) = M \quad \text{a.s.}$$

因此, 虽然证券组合的初始财富为 0, 但它产生的终端财富为 M a.s., 这里条件 (12.1.5) 简写成

$$\int_0^1 \theta_1^2(s)ds < \infty \quad \text{a.s.}$$

现在

$$\int_0^1 \theta_1^2(s)ds = \int_0^\alpha \frac{ds}{1-s} = \ln\left(\frac{1}{1-\alpha}\right) = \tau < \infty \quad \text{a.s.}$$

故此 (12.1.5) 成立. 但 $\theta(t)$ 不是容许的. 因为 $V(t) = Y(t\wedge\alpha) = \hat{B}\left(\ln\left(\frac{1}{1-t\wedge\alpha}\right)\right)$, 对 $(t,\omega)\in[0,1]\times\Omega$ 不是几乎必然下有界的. 注意 $\theta(t)$ 也并不满足 (12.1.19), 因为此时 $P=Q$, 且 (练习 7.4b)

$$E\Big[\int_0^1 \theta_1^2(s)ds\Big] = E[\tau] = \infty.$$

这个例子说明了仅要求证券组合为满足 (12.1.5) 自筹资的, 则即使风险价格过程 $X_1(t)$ 为布朗运动, 在 $V(0)=0$ 时, 它在终端时刻实际上可得到任意的值 $V(T,\omega)$. 这显然与金融中的实际情况相矛盾, 因此在实际的数学模型中, 必定要对证券组合施加比 (12.1.5) 更强的限制. 一个自然的限制是如上所用的 (12.1.18).

为了强调这个例子所说明的现象,引入下面著名的结果,它归功于Dudley(1977).

定理 12.1.5　设 F 是一个 $\mathcal{F}_T^{(m)}$ 可测的随机变量, $B(t)$ 为 m 维布朗运动, 那么存在 $\phi\in\mathcal{W}^m$ 使得

$$F(\omega) = \int_0^T \phi(t,\omega)dB(t), \tag{12.1.20}$$

注意 ϕ 不是唯一的, 见文献 (Karatzas, Shreve, 1991) 中的练习 3.4.22, 也可见练习 12.4.

它隐含了对任何常数 z, 存在 $\phi\in\mathcal{W}^m$ 使得

$$F(\omega) = z + \int_0^T \phi(t,\omega)dB(t),$$

于是, 如果设 $m=n$, $B_1(t)=X_1(t),\cdots,B_n(t)=X_n(t)$ 作为价格, 设 $X_0(t)\equiv 1$. 这意味着对任意的初始财富 z, 只要允许在 $\mathcal{W}^m$ 中自由地选择证券组合 ϕ, 则可得到任意的 $\mathcal{F}_T^{(m)}$ 可测的终端值 $F=V(T)$. 这又一次说明了必须对证券组合施加如条件 (12.1.18) 一样的某些限制.

如何判断一个给定的市场 $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是否存在套利呢? 下面的结果是很有用的.

引理 12.1.6　假定存在一个 $\mathcal{F}_T^{(m)}$ 上的测度 Q, 使得 $P\sim Q$, 且使得规范化的价格过程 $\{\bar{X}(t)\}_{t\in[0,T]}$ 相对于 Q 为局部鞅. 那么市场 $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ 不存在套利.

证明　假定 $\theta(t)$ 是关于 $\{\bar{X}(t)\}_{t\in[0,T]}$ 的一个套利. 设 $\bar{V}^\theta(t)$ 为规范化市场中相应的值过程且 $\bar{V}^\theta(0)=0$. 那么由 (12.1.14), $\bar{V}^\theta(t)$ 是关于 Q 的一个下有界的局部鞅. 因此, 由练习 7.12 知 $\bar{V}^\theta(t)$ 关于 Q 为上鞅, 于是

$$E_Q[\bar{V}^\theta(T)] \leqslant V^\theta(0) = 0, \tag{12.1.21}$$

但因为 $\bar{V}^\theta(T,\omega) \geqslant 0$, a.s. P, 故有 $\bar{V}^\theta(T,\omega) \geqslant 0$, a.s. Q(因为 $Q \ll P$). 且由 $P[\bar{V}^\theta(T) > 0] > 0$, 可得 $Q[\bar{V}^\theta(T) > 0] > 0$(因为 $P \ll Q$). 因此

$$E_Q[\bar{V}^\theta(T)] > 0,$$

它与 (12.1.21) 矛盾. 故在规范化的过程 $\{\bar{X}(t)\}$ 中不存在套利, 由此在 $\{X(t)\}$ 中也不存在套利 (练习 12.1).

定义 12.1.7 如果一个测度 $Q \sim P$, 且使规范化过程 $\{\bar{X}(t)\}_{t\in[0,T]}$ 相对于 Q 为 (局部) 鞅, 则称 Q 是一个等价 (局部) 鞅测度.

因此, 引理 12.1.6 说明如果存在一个等价局部鞅测度, 则市场不存在套利. 事实上, 市场也满足更强的条件"没有无风险的免费午餐"(NFLVR). 相反地, 如果市场满足 NFLVR 条件, 那么市场存在等价的鞅测度见文献 (Delbaen, Schachermayer, 1994, 1995, 1997; Levental, Skorohod, 1995) 及其参考文献. 这里解决一个较弱的结果, 它在很多应用上是相当好的.

定理 12.1.8 a) 假定存在一个过程 $u(t,\omega) \in \mathcal{V}^m(0,T)$ 使得

$$\sigma(t,\omega)u(t,\omega) = \mu(t,\omega) - \rho(t,\omega)\hat{X}(t,\omega) \text{ 对 a.a. } (t,\omega), \tag{12.1.22}$$

其中 $\hat{X}(t,\omega) = (X_1(t,\omega), \cdots, X_n(t,\omega))$. 同时使得

$$E\Big[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T u^2(t,\omega)dt\right)\Big] < \infty, \tag{12.1.23}$$

那么市场 $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ 无套利.

b) (Karatzas, 1996, 定理 0.2.4) 相反地, 如果市场无套利, 那么存在一个 $\mathcal{F}_t^{(m)}$ 适应 (t,ω) 可测过程 $u(t,\omega)$ 使得

$$\sigma(t,\omega)u(t,\omega) = \mu(t,\omega) - \rho(t,\omega)\hat{X}(t,\omega) \text{ 对 a.a. } (t,\omega).$$

证明 a) 假定 $\{X(t)\}$ 是一个规范的市场, 即 $\rho = 0$(练习 12.1). 在 $\mathcal{F}_T^{(m)}$ 上定义测度 $Q = Q_u$:

$$dQ(\omega) = \exp\Big(-\int_0^T u(t,\omega)dB(t) - \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t,\omega)dt\Big)dP(\omega), \tag{12.1.24}$$

那么 $Q \sim P$, 且由 Girsanov 定理 II (定理 8.6.4), 过程:

$$\tilde{B}(t) := \int_0^t u(s,\omega)ds + B(t) \tag{12.1.25}$$

是一个 Q 布朗运动, 且据 $\tilde{B}(t)$ 可得

$$dX_i(t) = \mu_i dt + \sigma_i dB(t) = \sigma_i d\tilde{B}(t), \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

因此 $X(t)$ 是一个局部 Q 鞅, 由引理 12.1.6 可推出结论.

b) 相反地, 假定市场是无套利的且是规范的. 对 $t \in [0,T]$, $\omega \in \Omega$, 设

$$\begin{aligned} F_t &= \{\omega;\ \text{方程 (12.1.22) 无解}\} \\ &= \{\omega;\ \mu(t,\omega)\text{不属于 } \sigma(t,\omega) \text{ 的列空间}\} \\ &= \{\omega;\ \exists\ v = v(t,\omega)\text{使得 } \sigma^T(t,\omega)v(t,\omega) = 0,\ v(t,\omega)\cdot\mu(t,\omega) \neq 0\}, \end{aligned}$$

对 $i = 1, 2, \cdots, n$, 定义

$$\theta_i(t,\omega) = \begin{cases} \operatorname{sign}(v(t,\omega)\cdot\mu(t,\omega))v_i(t,\omega), & \omega \in F_t \\ 0, & \omega \notin F_t \end{cases}$$

$\theta_0(t,\omega)$ 根据 (12.1.17) 来定, 且使得 $V^\theta(0) = 0$. 因为 $\sigma(t,\omega)$, $\mu(t,\omega)$ 都是 $\mathcal{F}_t^{(m)}$ 适应的, (t,ω) 可测的, 它表明可选择 $\theta(t,\omega)$ 也是 $\mathcal{F}_t^{(m)}$ 适应的, (t,ω) 可测的. 而且 $\theta(t,\omega)$ 是自筹资的, 它得到下面的终端值:

$$\begin{aligned} V^\theta(T,\omega) &= \int_0^T \sum_{i=1}^n \theta_i(s,\omega)dX_i(s) \\ &= \int_0^T \mathcal{X}_{F_s}(\omega)|v(s,\omega)\cdot\mu(s,\omega)|ds + \int_0^T \sum_{j=1}^m \Big(\sum_{i=1}^n \theta_i(s,\omega)\sigma_{ij}(s,\omega)\Big)dB_j(s) \\ &= \int_0^T \mathcal{X}_{F_s}(\omega)|v(s,\omega)\cdot\mu(s,\omega)|ds \\ &\quad + \int_0^T \operatorname{sign}(v(s,\omega)\cdot\mu(s,\omega))\mathcal{X}_{F_s}(\omega)\sigma^T(s,\omega)v(s,\omega)dB(s) \\ &= \int_0^T \mathcal{X}_{F_s}(\omega)|v(s,\omega)\cdot\mu(s,\omega)|ds \geqslant 0 \quad \text{a.s.} \end{aligned}$$

由于市场无套利, 一定有

$$\mathcal{X}_{F_t}(\omega) = 0 \text{ 对 a.a. } (t,\omega),$$

即 (12.1.22) 对 a.a. (t,ω) 有解.

例 12.1.9　a) 考虑价格过程 $X(t)$:

$$dX_0(t) = 0, \quad dX_1(t) = 2dt + dB_1(t), \quad dX_2(t) = -dt + dB_1(t) + dB_2(t),$$

此时有

$$\mu = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

系统 $\sigma u = \mu$ 有唯一解

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

由定理 12.1.8 a) 知 $X(t)$ 不存在套利.

b) 考虑价格过程 $Y(t)$:

$$dY_0(t) = 0, \quad dY_1(t) = 2dt + dB_1(t) + dB_2(t), \quad dY_2(t) = -dt - dB_1(t) - dB_2(t),$$

这里方程组 $\sigma u = \mu$ 的形式为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

它无解, 因此由定理 12.1.8 b) 知市场存在套利. 事实上可选择

$$\theta(t) = (\theta_0(t), 1, 1),$$

可得

$$\begin{aligned} V^\theta(T) &= V^\theta(0) + \int_0^T 2dt + dB_1(t) + dB_2(t) - dt - dB_1(t) - dB_2(t) \\ &= V^\theta(0) + T, \end{aligned}$$

特别, 如果据 (12.1.17) 选择 $\theta_0(t)$, 且使得 $V^\theta(0) = 0$, 那么 θ 是一个套利.

12.2 可达性与完备性

在本节先不加证明地叙述下面有用的结果, 它是文献 (Yor, 1997) 中命题 17.1 的一个特殊情形.

引理 12.2.1 假设过程 $u(t,\omega) \in \mathcal{V}^{(m)}(0,T)$ 满足条件:

$$E\Big[\exp\Big(\frac{1}{2}\int_0^T u^2(s,\omega)ds\Big)\Big] < \infty. \tag{12.2.1}$$

在 $\mathcal{F}_T^{(m)}$ 上定义测度 $Q = Q_u$:

$$dQ(\omega) = \exp\Big(-\int_0^T u(t,\omega)dB(t) - \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t,\omega)dt\Big)dP(\omega), \tag{12.2.2}$$

那么

$$\tilde{B}(t) := \int_0^t u(s,\omega)ds + B(t) \tag{12.2.3}$$

相对于 Q 是一个 $\mathcal{F}_t^{(m)}$ 鞅, (因此为 $\mathcal{F}_t^{(m)}$ 布朗运动.) 且对任意的 $F \in L^2(\mathcal{F}_T^{(m)}, Q)$ 有唯一的表示:

$$F(\omega) = E_Q[F] + \int_0^T \phi(t,\omega)d\tilde{B}(t), \tag{12.2.4}$$

这里 $\phi(t,\omega)$ 是一个 $\mathcal{F}_t^{(m)}$ 适应的, (t,ω) 可测的 $\mathbf{R}^m$ 值过程, 且满足:

$$E_Q\Big[\int_0^T \phi^2(t,\omega)dt\Big] < \infty. \tag{12.2.5}$$

附注　a) 由 $\{\tilde{B}(t)\}$ 产生的流 $\{\tilde{\mathcal{F}}_t^{(m)}\}$ 包含于流 $\{\mathcal{F}_t^{(m)}\}$(由 (12.2.3)), 但不必相等. 因此表示 (12.2.4) 不是 Itô表示定理 (定理 4.3.3) 或 Dudyley 定理 (定理 12.1.5) 的推论. 定理 12.1.5 在此处要求 F 是 $\tilde{\mathcal{F}}_T^{(m)}$ 可测的.

b) 为了证明 $\tilde{B}(t)$ 关于 Q 是 $\mathcal{F}_t^{(m)}$ 鞅. 应用 Itô 公式于过程:

$$Y(t) := Z(t)\tilde{B}(t),$$

这里

$$Z(t) = \exp\Big(-\int_0^t u(s,\omega)dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t u^2(s,\omega)ds\Big)$$

且利用 Bayes 公式和引理 8.6.2. 详细证明过程留给读者去做 (练习 12.5).

引理 12.2.2　设 $\bar{X}(t) = \xi(t)X(t)$ 是一个规范化过程, 如 (12.1.8)~(12.1.11). $\theta(t)$ 是市场 $\{X(t)\}$ 中的一个容许的证券组合, 其值过程为

$$V^\theta(t) = \theta(t)\cdot X(t), \tag{12.2.6}$$

那么 $\theta(t)$ 也是规范化市场 $\{\bar{X}(t)\}$ 中的一个容许的证券组合, 其值过程为

$$\bar{V}^\theta(t) := \theta(t)\cdot \bar{X}(t) = \xi(t)V^\theta(t), \tag{12.2.7}$$

反过来也成立. 换句话说, 有

$$V^\theta(t) = V^\theta(0) + \int_0^t \theta(s)dX(s), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{12.2.8}$$

$$\Updownarrow$$

$$\xi(t)V^\theta(t) = V^\theta(0) + \int_0^t \theta(s)d\bar{X}(s), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{12.2.9}$$

证明　注意 $\bar{V}^\theta(t)$ 下有界的充要条件是 $V^\theta(t)$ 下有界 (因为 $\rho(t)$ 是有界的). 首先考虑由价格过程 $X(t)$ 构成的市场. 设 $\theta(t)$ 是市场 $\{X(t)\}$ 中的一个容许的证券组合, 其值过程为 $V^\theta(t)$, 那么

$$\bar{V}^\theta(t) := \theta(t)\cdot \bar{X}(t) = \xi(t)V^\theta(t), \tag{12.2.10}$$

因为 $\theta(t)$ 是市场 $\{X(t)\}$ 中自筹资的, 由 (12.1.14) 有

$$d\bar{V}^{\theta}(t) := \theta(t)d\bar{X}(t), \tag{12.2.11}$$

因此 $\theta(t)$ 也是规范化市场 $\{\bar{X}(t)\}$ 中的一个容许的证券组合, 且 $\bar{V}^{\theta}(t) = V^{\theta}(0) + \int_0^t \theta(s)d\bar{X}(s)$. 这样证明了由 (12.2.8) 推出 (12.2.9), 上述过程可逆推, 因此引理得证.

引理 12.2.3 假设存在一个 m 维过程 $u(t,\omega) \in \mathcal{V}^m(0,T)$, 使得

$$\sigma(t,\omega)u(t,\omega) = \mu(t,\omega) - \rho(t,\omega)\hat{X}(t,\omega) \text{ 对 a.a. } (t,\omega), \tag{12.2.12}$$

其中 $\hat{X}(t,\omega) = (X_1(t,\omega),\cdots,X_n(t,\omega))$. 且有

$$E\Big[\exp\Big(\frac{1}{2}\int_0^T u^2(s,\omega)ds\Big)\Big] < \infty. \tag{12.2.13}$$

相应地, 如 (12.2.2), (12.2.3) 定义测度 $Q = Q_u$, 及过程 $\tilde{B}(t)$. 那么 $\tilde{B}$ 相对于 Q 是布朗运动, 按照 $\tilde{B}$, 对规范化市场 $\bar{X}(t) = \xi(t)X(t)$, 有下面的表示:

$$d\bar{X}_0(t) = 0, \tag{12.2.14}$$

$$d\bar{X}_i(t) = \xi(t)\sigma_i(t)d\tilde{B}(t), \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{12.2.15}$$

特别, 如果 $\int_0^T E_Q[\xi^2(t)\sigma_i^2(t)]dt < \infty$, 那么 Q 是一个等价鞅测度 (定义 12.1.7).

在任何情况下, 一个容许的证券组合 θ 的规范化值过程 $\bar{V}^{\theta}(t)$ 是一个局部 Q 鞅:

$$d\bar{V}^{\theta}(t) = \xi(t)\sum_{i=1}^{n}\theta_i(t)\sigma_i(t)d\tilde{B}(t) = \xi(t)\hat{\theta}(t)\sigma(t)d\tilde{B}(t), \tag{12.2.16}$$

这里 $\hat{\theta}(t) = (\theta_1(t),\cdots,\theta_n(t)) \in \mathbf{R}^{1\times n}$.

证明 由 Girsanov 定理可知, $\tilde{B}$ 相对于 Q 为布朗运动, 为了证明 (12.2.15), 计算

$$\begin{aligned}
d\bar{X}_i(t) &= d(\xi t X_i(t)) = \xi(t)dX_i(t) + X_i(t)d\xi(t)\\
&= \xi(t)[(\mu_i(t) - \rho(t)X_i(t))dt + \sigma_i(t)dB(t)]\\
&= \xi(t)[(\mu_i(t) - \rho(t)X_i(t))dt + \sigma_i(t)(d\tilde{B}(t) - u_i(t)dt)]\\
&= \xi(t)\sigma_i(t)d\tilde{B}(t),
\end{aligned}$$

特别, 如果 $\int_0^T E_Q[\xi^2(t)\sigma_i^2(t)]dt < \infty$, 那么由推论 3.2.6 知 $\bar{X}_i(t)$ 相对于 Q 是一个鞅.

最后, 表达式 (12.2.16) 可从 (12.2.11) 及 (12.2.15) 得出.

注意, 从现在起, 假定存在一个 (不必唯一) 过程 $u(t,\omega)\in\mathcal{V}^m(0,T)$, 满足 (12.2.12) 和 (12.2.13), 且记 $Q=Q_u$ 及 $\tilde{B}$ 如引理 12.2.3 描述的 (12.2.2), (12.2.3) 一样. 特别, 由定理 12.1.8, 它保证了市场 $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是无套利的.

定义 12.2.4 a) 一个 (欧式) 未定 T 权益 (或有权益) 是一个下有界 $\mathcal{F}_T^{(m)}$ 可测的随机变量 $F(\omega)\in L^2(Q)$.

b) 对权益 $F(\omega)$, 如果存在一个容许的证券组合 $\theta(t)$ 和一个实数 z 使得

$$F(\omega)=V_z^\theta(T):=z+\int_0^T\theta(t)dX(t)\text{ a.s.}$$

且

$$V_z^\theta(t)=z+\int_0^t\xi(s)\sum_{i=1}^n\theta_i(s)\sigma_i(s)d\tilde{B}(s),\quad 0\leqslant t\leqslant T\ \text{ 是一个 } Q \text{ 鞅},$$

则称 $F(\omega)$(在市场 $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ 中) 是可达的. 相应的 $\theta(t)$ 称为 F 的一个复制或对冲证券组合.

c) 如果每个 T 权益都是可达的, 则称市场 $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是完备的.

换句话说, 权益 $F(\omega)$ 是可达的, 意味着存在一个实数 z, 使得以它作为初始财富, 可找到一个容许的证券组合 $\theta(t)$, 其在 T 时刻的价值 $V_z^\theta(T)$ 几乎处处与 F 相等, 即

$$V_z^\theta(T,\omega)=F(\omega)\text{ 对 a.a. }\omega,$$

而且相应的规范化价值过程 $\bar{V}^\theta(t)$ 相对于 Q 是一个鞅而不只是局部鞅.

附注 如果去掉定义 12.2.4 b) 中的鞅条件, 那么复制证券组合 θ 不必是唯一的, 见练习 12.4.

什么样的权益是可达的? 什么样的市场是完备的? 一般来讲它们是重要但又很困难的问题, 下面将给出部分回答.

定理 12.2.5 市场 $\{X(t)\}$ 完备的充要条件是对几乎所有的 (t,ω), $\sigma(t,\omega)$ 有左逆 $\Lambda(t,\omega)$, 即存在一个 $\mathcal{F}_t^{(m)}$ 适应的矩阵值过程 $\Lambda(t,\omega)\in\mathbf{R}^{m\times n}$ 使得

$$\Lambda(t,\omega)\sigma(t,\omega)=I_m\text{ 对 a.a. }(t,\omega).\tag{12.2.17}$$

附注 性质 (12.2.17) 等价于性质:

$$r(\sigma(t,\omega))=m\text{ 对 a.a. }(t,\omega),\tag{12.2.18}$$

其中 $r(\sigma(t,\omega))$ 表示矩阵 $\sigma(t,\omega)$ 的秩.

证明 (i) 假定 (12.2.17) 成立, Q, $\tilde{B}$ 如 (12.2.2), (12.2.3), F 是一个 T 权益, 要证明存在一个容许的证券组合 $\theta(t)=(\theta_0(t),\cdots,\theta_n(t))$ 及实数 z, 使得当

$$V_z^\theta(t) = z + \int_0^t \theta(s)dX(s), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

那么 $\bar{V}_z^\theta(t)$ 是一个 Q 鞅, 且

$$V_z^\theta(T) = F(\omega) \text{ a.s.}$$

由 (12.2.16), 它等价于

$$\xi(T)F(\omega) = \bar{V}^\theta(T) = z + \int_0^T \xi(t)\sum_{i=1}^n \theta_i(t)\sigma_i(t)d\tilde{B}(t).$$

而由引理 12.2.1, 它有唯一的表示

$$\xi(T)F(\omega) = E_Q[\xi(T)F] + \int_0^T \phi(t,\omega)d\tilde{B}(t) = E_Q[\xi(T)F] + \int_0^T \sum_{j=1}^m \phi_j(t,\omega)d\tilde{B}_j(t),$$

其中 $\phi(t,\omega) = (\phi_1(t,\omega),\cdots,\phi_m(t,\omega)) \in \mathbf{R}^m$. 由此设

$$z = E_Q[\xi(T)F],$$

且选择 $\hat{\theta}(t) = (\theta_1(t),\cdots,\theta_n(t))$ 使得

$$\xi(t)\sum_{i=1}^n \theta_i(t)\sigma_{ij}(t) = \phi_j(t), \quad 1 \leqslant j \leqslant m,$$

即使得

$$\xi(t)\hat{\theta}(t)\sigma(t) = \phi(t),$$

由 (12.2.17) 知这个方程关于 $\hat{\theta}(t)$ 有解

$$\hat{\theta}(t) = X_0(t)\phi(t,\omega)\Lambda(t,\omega),$$

再按 (12.1.17) 选择 θ_0 使证券组合是自筹资的, 也可选择 $V^\theta(0) = z$. 而且, 由于 $\xi(t)V_z^\theta(t) = z + \int_0^t \theta(s)d\bar{X}(s) = z + \int_0^t \phi(s)d\tilde{B}(s)$ 是一个 Q 鞅. 可得到有用的公式:

$$\xi(t)V_z^\theta(t) = E_Q[\xi(T)V_z^\theta(T)|\tilde{\mathcal{F}}_t^{(m)}] = E_Q[\xi(T)F|\tilde{\mathcal{F}}_t^{(m)}], \tag{12.2.19}$$

这里 $\tilde{\mathcal{F}}_t^{(m)}$ 是由 $\tilde{B}(s)$, $s \leqslant t$ 生成的 σ 代数. 特别, $V_z^\theta(t)$ 是下有界的. 因此市场是完备的.

(ii) 反过来, 假定 $\{X(t)\}$ 是完备的, 那么 $\{\bar{X}(t)\}$ 也是完备的, 故可假设 $\rho = 0$. 由 a) 的计算表明, 由容许的证券组合 $\theta(t) = (\theta_0(t),\theta_1(t),\cdots,\theta_n(t))$, 且初值 $V_z^\theta(0) = z$ 所产生的值过程 $V_z^\theta(t)$ 为

$$V_z^\theta(t) = z + \int_0^t \sum_{j=1}^m \Big(\sum_{i=1}^n \theta_i\sigma_{ij}\Big)d\tilde{B}_j = z + \int_0^t \hat{\theta}\sigma d\tilde{B}, \tag{12.2.20}$$

这里, $\hat{\theta}(t)=(\theta_1(t),\cdots,\theta_n(t))$. 由于 $\{X(t)\}$ 是完备的, 可对冲任何 T 权益. 选择一个 $\mathcal{F}_t^{(m)}$ 适应过程 $\phi(t,\omega)\in\mathbf{R}^m$, 使得 $E_Q\left[\int_0^T\phi^2(t,\omega)dt\right]<\infty$, 且定义 $F(\omega):=\int_0^T\phi(t,\omega)d\tilde{B}(t)$, 那么 $E_Q[F^2]<\infty$. 由完备性知存在一个容许的证券组合 $\theta=(\theta_0,\hat{\theta})$ 使得 $V^\theta(t)=\int_0^t\hat{\theta}\sigma d\tilde{B}$ 是一个 Q 鞅, 且

$$F(\omega)=V^\theta(T)=\int_0^T\hat{\theta}\sigma d\tilde{B},$$

但

$$E_Q[F|\tilde{\mathcal{F}}_t^{(m)}]=\int_0^t\phi d\tilde{B}\ \text{a.s.},\ \forall\ t\in[0,T],$$

这里 $\tilde{\mathcal{F}}_t^{(m)}$ 是由 $\tilde{B}(s)$, $s\leqslant t$ 生成的 σ 代数. 由唯一性知, 对几乎所有的 (t,ω), $\phi(t,\omega)=\hat{\theta}(t,\omega)\sigma(t,\omega)$. 这表明 $\phi(t,\omega)$ 属于 $\sigma(t,\omega)$ 的行向量 $\{\sigma_i(t,\omega)\}_{i=1}^n$ 生成的行空间. 因为 $\phi\in L^2(\lambda\times Q)$ 是任意的, 得出对几乎所有的 (t,ω), $\{\sigma_i(t,\omega)\}_{i=1}^n$ 生成的空间是整个 $\mathbf{R}^m$. 因此, $\sigma(t,\omega)$ 的秩为 m. 且存在 $\Lambda(t,\omega)\in\mathbf{R}^{m\times n}$ 使得

$$\Lambda(t,\omega)\sigma(t,\omega)=I_m.$$

推论 12.2.6　(a) 如果 $n=m$, 那么市场完备的充要条件是 $\sigma(t,\omega)$ 对几乎所有的 (t,ω) 是可逆的.

(b) 如果市场完备, 那么

$$r(\sigma(t,\omega))=m\ 对\ \text{a.a.}\ (t,\omega),$$

特别, $n\geqslant m$. 而且, 满足 (12.2.12) 的过程 $u(t,\omega)$ 是唯一的.

证明　(a) 是定理 (12.2.5) 的直接推论, 因为存在左逆表明当 $n=m$ 时, 它是可逆的. 对 $n\times m$ 阶矩阵, 左逆的存在性表明它的秩必为 m, 这又可推出 $n\geqslant m$, (12.2.12) 的唯一解 $u(t,\omega)$ 为

$$u(t,\omega)=\Lambda(t,\omega)[\mu(t,\omega)-\rho(t,\omega)\hat{X}(t,\omega)],$$

这证明了 b).

例 12.2.7　定义 $X_0\equiv1$,

$$\begin{pmatrix}dX_1(t)\\dX_2(t)\\dX_3(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}dt+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dB_1(t)\\dB_2(t)\end{pmatrix}.$$

那么 $\rho=0$, 方程 (12.2.12) 的形式为

$$\sigma u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

唯一解 $u_1 = 1, u_2 = 2$. 因为 u 为常数, 显然 (12.2.12), (12.2.13) 成立. 立即看出 σ 秩为 2, 故 (12.2.18) 成立, 由定理 12.2.5 知市场是完备的.

因为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$

此时

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

是 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的左逆.

例 12.2.8 设 $X_0(t) \equiv 1$, 且

$$dX_1(t) = 2dt + dB_1(t) + dB_2(t),$$

那么 $\mu = 2$, $\sigma = (1, 1) \in \mathbf{R}^{1\times 2}$, 由此 $n = 1 < 2 = m$, 由推论 12.2.6 知市场不可能完备. 故存在 T 权益不能被对冲. 能找到这样的 T 权益吗? 设 $\theta(t) = (\theta_0(t), \theta_1(t))$ 是容许的证券组合, 那么相应的值过程 $V_z^\theta(t)$ 为 (见 (12.2.20))

$$V_z^\theta(t) = z + \int_0^t \theta_1(s)(d\tilde{B}_1(s) + d\tilde{B}_2(s)).$$

故此, 如果 θ 对冲一个 T 权益 $F(\omega)$, 则有 $V_z^\theta(t)$ 是一个 Q 鞅, 且

$$F(\omega) = z + \int_0^T \theta_1(s)(d\tilde{B}_1(s) + d\tilde{B}_2(s)), \tag{12.2.21}$$

选择 $F(\omega) = g(\tilde{B}_1(T))$, 这里 $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是有界的, 把 Itô 表示定理应用到 2 维布朗运动 $\tilde{B}(t) = (\tilde{B}_1(t), \tilde{B}_2(t))$. 存在唯一的 $\phi(t,\omega) = (\phi_1(t,\omega), \phi_2(t,\omega))$ 使得 $E_Q\left[\int_0^T (\phi_i^2(s) + \phi_2^2(s))ds\right] < \infty$, 且

$$g(\tilde{B}_1(T)) = E_Q[g(\tilde{B}_1(T))] + \int_0^T \phi_1(s)d\tilde{B}_1(s) + \phi_2(s)d\tilde{B}_2(s),$$

而把 Itô 表示定理应用到 $\tilde{B}_1(t)$, 则必有 $\phi_2 = 0$, 即

$$g(\tilde{B}_1(T)) = E_Q[g(\tilde{B}_1(T))] + \int_0^T \phi_1(s)d\tilde{B}_1(s),$$

把它与 (12.2.21) 进行比较且利用鞅性质得

$$z + \int_0^t \theta_1(s)(d\tilde{B}_1(s) + d\tilde{B}_2(s)) = E_Q[F|\mathcal{F}_t] = E_Q[F] + \int_0^t \theta_1(s)d\tilde{B}_1(s),$$

这表明对 a.a. (s,ω), $\theta_1(s) = \phi_1(s)$ 且 $\theta_1(s) = 0$, 这样矛盾, 故当 g 不为常数时, $F(\omega) = g(\tilde{B}_1(T))$, 不能被对冲.

附注 按照等价鞅测度看, 市场的完备性有一个惊人的特征, 它归功于 Harrison 和 Pliskal(1983) 及 Jacod(1979).

市场 $\{X(t)\}$ 完备的充要条件是对规范化市场 $\{\bar{X}(t)\}$, 存在唯一的等价鞅测度 (把上述结果与定义 12.1.7 后面的无套利/NFLVR 市场的等价鞅测度特征进行比较!)

12.3 期 权 定 价

欧式期权

设 $F(\omega)$ 是一个 T 权益, F 上的一个欧式期权是确保在 $t = T > 0$ 时刻, 得到支付 $F(\omega)$. 那么在 $t = 0$ 时刻, 对这样的一个保证, 你愿付出多少? 可进行如下的讨论: 如果作为期权的买者, 为这个保证付出价格 y, 那么在它的投资策略中, 初始财富为 $-y$, 经过对冲, 到 T 时刻证券组合的价值 $V_{-y}^{\theta}(T,\omega)$ 与保证得到的支付 $F(\omega)$ 之和应为非负的结果

$$V_{-y}^{\theta}(T,\omega) + F(\omega) \geqslant 0 \quad \text{a.s.}$$

因此买者愿意付出的最高价格 $p = p(F)$((欧式) 未定权益 F 的买方价格) 为

$$\begin{aligned} p(F) = \sup \Big\{ y;\ &\text{存在一个容许的证券组合 } \varphi \text{ 使得} \\ &V_{-y}^{\varphi}(T,\omega) := -y + \int_0^T \varphi(s)dX(s) \geqslant -F(\omega) \text{ a.s.} \Big\} \end{aligned} \tag{12.3.1}$$

另一方面, 该期权的卖者可进行如下讨论: 作为卖者接受价格 z, 则利用这个作为初始财富进行投资, 到 T 时刻使其价值 $V_z^{\varphi}(T,\omega)$ 不少于许诺支付给买者的数量 $F(\omega)$:

$$V_z^{\varphi}(T,\omega) \geqslant F(\omega) \quad \text{a.s.}$$

卖者愿意接受的最低价格 $q = q(F)$((欧式) 未定权益 F 的卖方价格) 为

$$q(F)=\inf\Big\{z;\ \text{存在一个容许的证券组合}\ \psi\ \text{使得}$$
$$V_z^{\psi}(T,\omega):=z+\int_0^T\psi(s)dX(s)\geqslant F(\omega)\ \text{ a.s.}\Big\}. \qquad (12.3.2)$$

定义 12.3.1 如果 $p(F)=q(F)$, 称这个公共值为 (欧式)T 未定权益 $F(\omega)$ 的 (在 $t=0$ 时) 价格.

关于欧式未定权益的两个重要的例子:

a) **欧式看涨期权**: 对某个 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 及 $K>0$,

$$F(\omega)=(X_i(T,\omega)-K)^+,$$

该期权给予持有者在 T 时刻有权力 (但没有义务) 以特殊的价格 K(执行价) 购买一单位资产 i. 因此, 当 $X_i(T,\omega)>K$ 时, 在 T 时刻, 期权持有者将得到支付为 $X_i(T,\omega)-K$, 然而如果 $X_i(T,\omega)\leqslant K$, 期权持有者将不会执行期权, 此时得到的支付为零.

b) 类似地, **欧式看跌期权**给予持有者在 T 时刻有权力 (但没有义务) 以特殊的价格 K(执行价) 卖掉一单位资产 i. 这个期权表明持有者得到的支付为

$$F(\omega)=(K-X_i(T,\omega))^+.$$

定理 12.3.2 a) 假设 (12.2.12) 和 (12.2.13) 成立, Q 如 (12.2.2), F 是一个 (欧式)T 权益, 那么

$$\operatorname{essinf} F(\omega)\leqslant p(F)\leqslant E_Q[\xi(T)F]\leqslant q(F)\leqslant\infty. \qquad (12.3.3)$$

b) 在 a) 的条件下再附加市场 $\{X(t)\}$ 是完备的假定, 则 (欧式)T 权益 F 的价格是

$$p(F)=E_Q[\xi(T)F]=q(F). \qquad (12.3.4)$$

证明 a) 假定 $y\in\mathbf{R}$, 且存在容许的证券组合 φ 使得

$$V_{-y}^{\varphi}(T,\omega)=-y+\int_0^T\varphi(s)dX(s)\geqslant-F(\omega)\ \text{ a.s.}$$

即利用 (12.2.7) 和引理 12.2.2 有

$$-y+\int_0^T\sum_{i=1}^n\varphi_i(s)\xi(s)\sigma_i(s)d\tilde{B}(s)\geqslant-\xi(T)F(\omega)\ \text{a.s.} \qquad (12.3.5)$$

这里 $\tilde{B}$ 如定义 (12.2.3).

因为 $\int_0^t\sum_{i=1}^n\varphi_i(s)\xi(s)\sigma_i(s)d\tilde{B}(s)$ 是一个下有界的局部 Q 鞅, 由练习 7.12 知它为上鞅. 因此对任意的 $t\in[0,T]$, $E_Q\left[\int_0^t\sum_{i=1}^n\varphi_i(s)\xi(s)\sigma_i(s)d\tilde{B}(s)\right]\leqslant 0$. 对 (12.3.5)

两边依测度 Q 取期望可得

$$y \leqslant E_Q[\xi(T)F],$$

因此

$$p(F) \leqslant E_Q[\xi(T)F].$$

这证明了 (12.3.3) 中的第二个不等式. 显然, 如果对几乎所有的 ω, $y < F(\omega)$, 则可选择 $\varphi = 0$. 因此 (12.3.3) 中的第一个不等式成立.

类似地, 如果存在 $z \in \mathbf{R}$ 和一个容许的证券组合 ψ 使得

$$z + \int_0^T \psi(s)dX(s) \geqslant F(\omega) \text{ a.s.}$$

那么, 如 (12.3.5)

$$z + \int_0^T \sum_{i=1}^n \psi_i(s)\xi(s)\sigma_i(s)d\tilde{B}(s) \geqslant \xi(T)F(\omega) \text{ a.s.}$$

两边依测度 Q 取期望可得

$$z \geqslant E_Q[\xi(T)F].$$

如果这样的 z, ψ 不存在, 那么 $q(F) = \infty > E_Q[\xi(T)F]$.

b) 另外再假定市场是完备的, 则由完备性知, 存在 (唯一的)$y \in \mathbf{R}$ 及 θ 使得

$$-y + \int_0^T \theta(s)dX(s) = -F(\omega) \text{ a.s.}$$

即 (由 (12.2.7) 和引理 12.2.2)

$$-y + \int_0^T \sum_{i=1}^n \theta_i(s)\xi(s)\sigma_i(s)d\tilde{B}(s) = -\xi(T)F(\omega) \text{ a.s.}$$

由于 $\int_0^t \sum_{i=1}^n \theta_i(s)\xi(s)\sigma_i(s)d\tilde{B}(s)$ 是一个 Q 鞅 (定义 12.2.4 c)), 故有

$$y = E_Q[\xi(T)F],$$

因此

$$p(F) \geqslant E_Q[\xi(T)F].$$

结合 a) 得到

$$p(F) = E_Q[\xi(T)F].$$

类似的讨论可得到

$$q(F) = E_Q[\xi(T)F].$$

定理证明完毕.

如何对冲一个可达权益

由前知如果 V_z^θ 是市场 $\{X(t)\}$ 中容许的证券组合 $\theta(t)$ 的价值过程, 那么 $\bar{V}_z^\theta(t) := \xi(t)V_z^\theta(t)$ 也是规范化市场 $\{\bar{X}(t)\}$ 中容许证券组合 $\theta(t)$ 的价值过程 (引理 12.2.2). 由此有

$$\xi(t)V_z^\theta(t) = z + \int_0^t \theta(s)d\bar{X}(s). \tag{12.3.6}$$

如果 (12.2.12), (12.2.13) 成立, Q, $\tilde{B}$ 如前 ((12.2.2), (12.2.3)) 定义, 可把上式改写为 (见引理 12.2.3)

$$\xi(t)V_z^\theta(t) = z + \int_0^t \sum_{i=1}^n \theta_i(s)\xi(s)\sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(s)d\tilde{B}_j(s), \tag{12.3.7}$$

因此, 对冲给定的 T 权益 F 的证券组合 $\theta(t) = (\theta_0(t), \cdots, \theta_n(t))$ 必须满足

$$\xi(t,\omega)(\theta_1(t), \cdots, \theta_n(t))\sigma(t,\omega) = \phi(t,\omega), \tag{12.3.8}$$

即

$$\hat{\theta}(t) = X_0(t)\phi(t)\Lambda(t),$$

这里 $\phi(t,\omega) \in \mathbf{R}^m$ 是使得

$$\xi(T)F(\omega) = z + \int_0^T \phi(t,\omega)d\tilde{B}(t) \tag{12.3.9}$$

成立 ($\theta_0(t)$ 由 (12.1.17) 给出).

依此观点, 当 F 给定时, 显式地找出被积函数 $\phi(t,\omega)$ 是令人感兴趣的. 解决途径之一是利用 Malliavin 随机分析中推广的 Clark-Ocone 定理 (Karatzas, Ocone, 1991). 在 Økendal (1996) 的综述中包括了他们的结果. 然而在 Markov 情形, 下面将介绍一个简单的方法, 它是 Hu(1995) 所用方法的一个修正.

设 $Y(t)$ 是 $\mathbf{R}^k$ 中的 Itô 扩散:

$$dY(t) = b(Y(t))dt + \sigma(Y(t))d\tilde{B}(t), \quad Y(0) = y, \tag{12.3.10}$$

这里 $b: \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$ 和 $\sigma: \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^{k\times l}$ 是给定的 Lipschitz 连续函数, 假定 $Y(t)$ 是一致椭圆型的, 即存在常数 $c > 0$ 使得对任意的 $x \in \mathbf{R}^k$, $y \in \mathbf{R}^k$,

$$x^T\sigma(y)\sigma^T(y)x \geqslant c|x|^2, \tag{12.3.11}$$

设 $h \in C_0^2(\mathbf{R}^k)$, 定义

$$g(t,y) = E_Q^y[h(Y(T-t))], \quad t \in [0,T],\ y \in \mathbf{R}^k, \tag{12.3.12}$$

那么由一致椭圆性知 $g(t,y) \in C^{1,2}((0,T) \times \mathbf{R}^k)$(Dynkin, 1965, Ⅱ, 第 53 页), Kolmogorov 后向方程 (定理 8.1.1) 为

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{i=1}^{k} b_i(y) \frac{\partial g}{\partial y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k} (\sigma\sigma^T)_{ij}(y) \frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_j} = 0. \tag{12.3.13}$$

现在设

$$Z(t) = g(t, Y(t)), \tag{12.3.14}$$

由 Itô 公式及 (12.3.13) 有

$$\begin{aligned} dZ(t) = & \frac{\partial g}{\partial t}(t, Y(t))dt + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial g}{\partial y_i}(t, Y(t))dY_i(t) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{k} (\sigma\sigma^T)_{ij}(Y(t)) \frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_j}(t, Y(t))dt \\ = & \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial g}{\partial y_i}(t, Y(t))\sigma(Y(t))d\tilde{B}(t), \end{aligned} \tag{12.3.15}$$

而且有

$$Z(T) = g(T, Y(T)) = E_Q^{Y(T)}[h(Y(0))] = h(Y(T)), \tag{12.3.16}$$

$$Z(0) = g(0, Y(0)) = E_Q^y[h(Y(T))]. \tag{12.3.17}$$

结合 (12.3.15)~(12.3.17) 得

$$h(Y(T)) = E_Q^y[h(Y(T))] + \int_0^T \phi(t,\omega)d\tilde{B}(t), \tag{12.3.18}$$

这里

$$\phi(t,\omega) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial y_i} E_Q^y[h(Y(T-t))]_{y=Y(t)}\sigma_i(Y(t)). \tag{12.3.19}$$

更一般地, 用一致椭圆型过程 $Y^{(n)}(t)$ 去逼近更一般的过程 $Y(t)$, 用 C_0^2 函数 $H^{(m)}(y)$ 逼近更一般的函数 $h(y), n, m = 1, 2, \cdots$, 则可得到下面的结论:

定理 12.3.3 设 $Y(t) \in \mathbf{R}^k$ 是一个形如 (12.3.10) 的 Itô扩散, 假定 $h : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ 是一个给定的函数, 使得

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y_i} E_Q^y[h(Y(T-t))] \right\}_{i=1}^{k} \tag{12.3.20}$$

存在且

$$E_Q^y\left[\int_0^T \phi^2(t,\omega)dt\right] < \infty, \tag{12.3.21}$$

这里

$$\phi(t,\omega)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial}{\partial y_i}E_Q^y[h(Y(T-t))]_{y=Y(t)}\sigma_i(Y(t)), \tag{12.3.22}$$

那么由 Itô 表示公式

$$h(Y(T))=E_Q[h(Y(T))]+\int_0^T\phi(t,\omega)d\tilde{B}(t). \tag{12.3.23}$$

为了应用该结果去求 (12.3.9) 中的 ϕ, 讨论如下:

假定关于 $X(t)$ 的方程是 Markov 的, 即

$$\begin{aligned}dX_0(t)&=\rho(X(t))X_0(t)dt,\quad X_0(0)=1,\\ dX_i(t)&=\mu_i(X(t))dt+\sigma_i(X(t))dB(t),\quad i=1,2,\cdots,n,\end{aligned}$$

这里 σ_i 是矩阵 σ 的第 i 行. 按 $\tilde{B}(t)$ 重写关于 $X(t)$ 的方程, 利用 (12.2.12) 和 (12.2.13) 得到下面的系统

$$dX_0(t)=\rho(X(t))X_0(t)dt, \tag{12.3.24}$$

$$dX_i(t)=\rho(X(t))X_i(t)dt+\sigma_i(X(t))d\tilde{B}(t),\quad i=1,2,\cdots,n, \tag{12.3.25}$$

故由定理 12.3.3 得到下面的推论:

推论 12.3.4 设 $X(t)=(X_0(t),\cdots,X_n(t))\in\mathbf{R}^{n+1}$ 由 (12.3.24) 和 (12.3.25) 给出. $h_0:\mathbf{R}^{n+1}\to\mathbf{R}$ 是一个给定的函数, 使得

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}E_Q^x[\xi(T-t)h_0(X(T-t))]\right\}_{i=1}^{n} \tag{12.3.26}$$

存在且

$$E_Q^x\left[\int_0^T\phi^2(t,\omega)dt\right]<\infty, \tag{12.3.27}$$

这里

$$\phi(t,\omega)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}E_Q^x[\xi(T-t)h_0(X(T-t))]_{x=X(t)}\sigma_i(X(t)), \tag{12.3.28}$$

那么由 Itô 表示公式

$$\xi(T)h_0(X(T))=E_Q[\xi(T)h_0(X(T))]+\int_0^T\phi(t,\omega)d\tilde{B}(t). \tag{12.3.29}$$

概括关于欧式 T 权益的定价及对冲的结果如下:

定理 12.3.5 设 $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是一个完备市场. 假如 (12.2.12) 和 (12.2.13) 成立. Q, $\tilde{B}$ 如 (12.2.2), (12.2.3). F 是一个欧式 T 权益, 使得 $E_Q[\xi(T)F]<\infty$. 那么权益 F 的价格为

$$p(F)=E_Q[\xi(T)F], \tag{12.3.30}$$

而且, 为了求权益 F 的一个复制 (对冲) 证券组合 $\theta(t)=(\theta_0(t),\cdots,\theta_n(t))$. 先要找到 (如可用推论 12.3.4) 一个适应过程 ϕ, 使得 $E_Q\left[\int_0^T\phi^2(t)dt\right]<\infty$, 且

$$\xi(T)F=E_Q[\xi(T)F]+\int_0^T\phi(t,\omega)d\tilde{B}(t), \tag{12.3.31}$$

然后选择 $\hat{\theta}(t)=(\theta_1(t),\cdots,\theta_n(t))$ 使得

$$\hat{\theta}(t,\omega)\xi(t,\omega)\sigma(t,\omega)=\phi(t,\omega), \tag{12.3.32}$$

$\theta_0(t)$ 由 (12.1.17) 来确定.

证明 (12.3.30) 就是定理 12.3.2 的 b) 部分. 方程 (12.3.32) 由 (12.3.8) 可得到. 注意方程 (12.3.32) 有解

$$\hat{\theta}(t,\omega)=X_0(t)\phi(t,\omega)\Lambda(t,\omega), \tag{12.3.33}$$

这里 $\Lambda(t,\omega)$ 是 $\sigma(t,\omega)$ 的左逆 (定理 12.2.5).

例 12.3.6 假定市场为 $(X_0(t),X_1(t))$, 这里 $X_0(t)=e^{\rho t}$, $X_1(t)$ 是一个 Ornstein-Uhlenbeck 过程

$$dX_1(t)=\alpha X_1(t)dt+\sigma dB(t),\quad X_1(0)=x_1,$$

这里 $\rho>0$, α, σ 是常数, $\sigma\neq 0$. 怎样对冲权益:

$$F(\omega)=\exp(X_1(T)).$$

要找的证券组合 $\theta(t)=(\theta_0(t),\theta_1(t))$ 由 (12.3.33) 给出, 即

$$\theta_1(t,\omega)=e^{\rho t}\sigma^{-1}\phi(t,\omega),$$

这里 $\phi(t,\omega)$ 和 $V(0)=z$ 由 (12.3.9) 唯一地给出, 即

$$\xi(T)F(\omega)=z+\int_0^T\phi(t,\omega)d\tilde{B}(t)$$

或

$$F(\omega)=\exp(X_1(T))=ze^{\rho T}+\int_0^T\phi_0(t,\omega)d\tilde{B}(t),$$

其中

$$\phi_0(t,\omega) = e^{\rho T}\phi(t,\omega).$$

为了显式地求出 $\phi(t,\omega)$, 应用推论 12.3.4, 注意到按 $\tilde{B}$ 有

$$dX_1(t) = \rho X_1(t)dt + \sigma d\tilde{B}(t), \quad X_1(0) = x_1,$$

该方程有解 (见练习 5.5)

$$X_1(t) = x_1 e^{\rho t} + \sigma \int_0^t e^{\rho(t-s)} d\tilde{B}(s),$$

因此, 如果选择 $h_0(x_1) = \exp(x_1)$, 可得到

$$\begin{aligned} & E_Q^{x_1}[h_0(X(T-t))] = E_Q^{x_1}[\exp(X_1(T-t))] \\ &= E_Q\left[\exp\left\{x_1 e^{\rho(T-t)} + \sigma \int_0^{T-t} e^{\rho(T-t-s)} d\tilde{B}(s)\right\}\right] \\ &= \exp\left\{x_1 e^{\rho(T-t)} + \frac{\sigma^2}{4\rho}(e^{2\rho(T-t)} - 1)\right\}, \quad \text{如果 } \rho \neq 0. \end{aligned}$$

由 (12.3.28) 得到

$$\begin{aligned} \phi_0(t,\omega) &= \frac{d}{dx_1} E_Q^{x_1}[h_0(X(T-t))]_{x_1 = X_1(t)}\sigma \\ &= \sigma e^{\rho(T-t)} \exp\left\{X_1(t)e^{\rho(T-t)} + \frac{\sigma^2}{4\rho}(e^{2\rho(T-t)} - 1)\right\}, \quad \text{如果 } \rho \neq 0. \end{aligned}$$

由 (12.3.33) 有

$$\theta_1(t) = \begin{cases} \exp\left\{X_1(t)e^{\rho(T-t)} + \dfrac{\sigma^2}{4\rho}(e^{2\rho(T-t)} - 1)\right\}, & \text{如果 } \rho \neq 0 \\ \exp\left\{X_1(t)e^{\rho(T-t)} + \dfrac{\sigma^2}{2}(T-t)\right\}, & \text{如果 } \rho = 0 \end{cases}$$

推广的 Black-Scholes 模型

市场上有两种证券 $X_0(t), X_1(t)$, 它们具有如下的 Itô 过程:

$$dX_0(t) = \rho(t,\omega)X_0(t)dt, \tag{12.3.34}$$

$$dX_1(t) = \alpha(t,\omega)X_1(t)dt + \beta(t,\omega)X_1(t)dB(t), \tag{12.3.35}$$

其中 $B(t)$ 为 1 维的布朗运动. $\alpha(t,\omega)$, $\beta(t,\omega)$ 是 $\mathcal{W}$ 中的 1 维过程.

注意 (12.3.35) 的解是

$$X_1(t) = X_1(0)\exp\left(\int_0^t \beta(s,\omega)dB(s) + \int_0^t (\alpha(s,\omega) - \frac{1}{2}\beta^2(s,\omega))ds\right), \tag{12.3.36}$$

由方程 (12.2.12) 得到

$$X_1(t)\beta(t,\omega)u(t,\omega)=X_1(t)\alpha(t,\omega)-X_1(t)\rho(t,\omega),$$

它的解

$$u(t)=\beta^{-1}(t,\omega)[\alpha(t,\omega)-\rho(t,\omega)],\quad 如果\ \beta(t,\omega)\neq 0,\tag{12.3.37}$$

于是 (12.2.13) 成立的充要条件是

$$E\Big[\exp\Big(\frac{1}{2}\int_0^T\frac{(\alpha(s,\omega)-\rho(s,\omega))^2}{\beta^2(s,\omega)}ds\Big)\Big]<\infty,\tag{12.3.38}$$

此时得到一个由 (12.2.2) 给出的等价鞅测度 Q. 由定理 12.1.8, 市场无套利. 而且由推论 12.2.6 知市场完备. 于是据定理 12.3.2, 对一个收益为 T 权益 F 的欧式期权, 在 $t=0$ 时的价格为

$$p(F)=q(F)=E_Q[\xi(T)F].\tag{12.3.39}$$

现在设 $\rho(t,\omega)=\rho(t)$, $\beta(t,\omega)=\beta(t)$ 是确定性的, 收益 $F(\omega)$ 为

$$F(\omega)=f(X_1(T,\omega)),$$

$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是给定的下有界函数使得

$$E_Q[f(X_1(T))]<\infty,$$

那么由 (12.3.9), 价格 $p=p(F)=q(F)$ 为

$$p=\xi(T)E_Q\Big[f\Big(x_1\exp\Big(\int_0^T\beta(s)d\tilde{B}(s)+\int_0^T(\rho(s)-\frac{1}{2}\beta^2(s))ds\Big)\Big)\Big],$$

其中 $x_1=X_1(0)$. 在测度 Q 下, 随机变量 $Y=\int_0^T\beta(s)d\tilde{B}(s)$ 服从正态分布, 其均值为 0, 方差为 $\delta^2:=\int_0^T\beta^2(t)dt$, 于是可得到关于 p 的一个更显式的表达式. 其结果如下:

定理 12.3.7 (推广的 Black-Scholes 公式) 假如 $X(t)=(X_0(t),X_1(t))$ 如下:

$$dX_0(t)=\rho(t)X_0(t)dt;\quad X_0(0)=1,\tag{12.3.40}$$

$$dX_1(t)=\alpha(t,\omega)X_1(t)dt+\beta(t)X_1(t)dB(t),\quad X_1(0)=x_1>0,\tag{12.3.41}$$

这里 $\rho(t)$, $\beta(t)$ 都是确定性的, 且

$$E\Big[\exp\Big(\frac{1}{2}\int_0^T\frac{(\alpha(t,\omega)-\rho(t))^2}{\beta^2(t)}dt\Big)\Big]<\infty.$$

a) 那么市场 $\{X(t)\}$ 是无套利的且是完备的. 若 $E_Q[f(X_1(T,\omega))] < \infty$, 则欧式 T 权益 $F(\omega) = f(X_1(T,\omega))$ 在 $t=0$ 时的价格为

$$p = \frac{\xi(T)}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} f\Big(x_1 \exp\Big[y + \int_0^T (\rho(s) - \frac{1}{2}\beta^2(s))ds\Big]\Big) \exp\Big(-\frac{y^2}{2\delta^2}\Big)dy, \qquad (12.3.42)$$

这里 $\xi(T) = \exp\left(-\int_0^T \rho(s)ds\right)$, $\delta^2 = \int_0^T \beta^2(s)ds.$

b) 如果 ρ, α, $\beta \neq 0$ 都为常数, $f \in C^1(\mathbf{R})$. 那么复制 T 权益 $F(\omega) = f(X_1(T,\omega))$ 的自筹资证券组合 $\theta(t) = (\theta_0(t), \theta_1(t))$, 由下式给出

$$\begin{aligned}\theta_1(t,\omega) = &\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\mathbf{R}} f'\left(X_1(t,\omega)\exp\left\{\beta x + \left(\rho - \frac{1}{2}\beta^2\right)(T-t)\right\}\right)\\ &\cdot \exp\left(\beta x - \frac{x^2}{2(T-t)} - \frac{1}{2}\beta^2(T-t)\right)dx, \qquad (12.3.43)\end{aligned}$$

$\theta_0(t,\omega)$ 由 (12.1.17) 确定, 且 $V^\theta(0) = p$.

证明 a) 部分前面已证, b) 部分可由定理 12.3.4 及定理 12.3.5 得到.

b) 要找的证券组合由 (12.3.33) 给出

$$\theta_1(t,\omega) = X_0(t)(\beta X_1(t,\omega))^{-1}\phi(t,\omega),$$

这里 $\phi(t,\omega)$ 由 (12.3.28) 给出, 其中 $h(y) = f(y)$, 且

$$X_1(t) = x_1 \exp\left\{\beta\tilde{B}(t) + \left(\rho - \frac{1}{2}\beta^2\right)t\right\},$$

因此

$$\begin{aligned}\theta_1(t,\omega) &= e^{\rho t}(\beta X_1(t,\omega))^{-1}\frac{\partial}{\partial x_1}[E_Q^{x_1}[e^{-\rho T}f(X_1(T-t))]]_{x_1=X_1(t)} \cdot \beta X_1(t,\omega)\\ &= e^{\rho(t-T)}\frac{\partial}{\partial x_1}E\left[f'\left(x_1\exp\left\{\beta B(T-t) + \left(\rho - \frac{1}{2}\beta^2\right)(T-t)\right\}\right)\right]_{x_1=X_1(t)}\\ &= e^{\rho(t-T)}E\Big[f'\left(x_1\exp\left\{\beta B(T-t) + \left(\rho - \frac{1}{2}\beta^2\right)(T-t)\right\}\right)\\ &\quad\cdot \exp\left\{\beta B(T-t) + \left(\rho - \frac{1}{2}\beta^2\right)(T-t)\right\}\Big]_{x_1=X_1(t)}\\ &= \frac{e^{\rho(t-T)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{\mathbf{R}} f'\left(X_1(t,\omega)\exp\left\{\beta x + \left(\rho - \frac{1}{2}\beta^2\right)(T-t)\right\}\right)\\ &\quad\cdot \exp\left\{\beta x + \left(\rho - \frac{1}{2}\beta^2\right)(T-t)\right\}e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}dx,\end{aligned}$$

此即 (12.3.43).

定理 12.3.7 的一个重要的特殊情形如下:

推论 12.3.8 (经典的 Black-Scholes 公式)　a) 设 $X(t)=(X_0(t),X_1(t))$ 是经典的 Black-Scholes 市场:

$$dX_0(t)=\rho X_0(t)dt,\quad X_0(0)=1,$$
$$dX_1(t)=\alpha X_1(t)dt+\beta X_1(t)dB(t),\quad X_1(0)=x_1>0,$$

这里 ρ, α, $\beta\neq 0$ 都为常数. 那么对于终端收益为

$$F(\omega)=(X_1(T,\omega)-K)^+, \tag{12.3.44}$$

其中 $K>0$ 为常数 (执行价) 的欧式看涨期权, 在 $t=0$ 时的价格 p 为

$$p=x_1\Phi\left(\eta+\frac{1}{2}\beta\sqrt{T}\right)-Ke^{-\rho T}\Phi\left(\eta-\frac{1}{2}\beta\sqrt{T}\right), \tag{12.3.45}$$

其中

$$\eta=\beta^{-1}T^{-\frac{1}{2}}\left(\ln\frac{x_1}{K}+\rho T\right) \tag{12.3.46}$$

且

$$\Phi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx,\quad y\in\mathbf{R} \tag{12.3.47}$$

为标准的正态分布.

b) 对 (12.3.44) 的权益 F, 它的复制证券组合 $\theta(t)=(\theta_0(t),\theta_1(t))$ 为

$$\theta_1(t,\omega)=\Phi\Big(\beta^{-1}(T-t)^{-\frac{1}{2}}\Big(\ln\frac{X_1(t)}{K}+\rho(T-t)+\frac{1}{2}\beta^2(T_t)\Big)\Big), \tag{12.3.48}$$

$\theta_0(t,\omega)$ 由 (12.1.17) 确定, 且 $V^\theta(0)=p$.

附注　特别, 对任意的 $t\in[0,T]$, $\theta_1(t,\omega)>0$, 它意味着不需卖空就可以复制欧式看涨期权. 对于欧式看跌期权, 情形有所不同, 见练习 12.16.

证明　a) 应用定理 12.3.7 a) 于函数

$$f(z)=(z-K)^+,$$

相应于 (12.3.42) 的积分可写成

$$p=\frac{e^{-\rho T}}{\beta\sqrt{2\pi T}}\int_{\gamma}^{\mathbf{R}}\left(x_1\exp\left[y+\left(\rho-\frac{1}{2}\beta^2\right)T\right]-K\right)\exp\Big(-\frac{y^2}{2\beta^2T}\Big)dy,$$

这里 $\gamma=\ln\left(\dfrac{K}{x_1}\right)-\rho T+\dfrac{1}{2}\beta^2T$.

上述积分可分成两部分, 通过配方法每部分都可归约为标准正态分布型的积分. 详细过程留给读者 (练习 12.13.).

b) 类似地, 由定理 12.3.7 b) 可得到. 虽然函数 $f(z)=(z-K)^+$ 不在 C^1 中, 但如果 f' 用下式表示:

$$f'(z)=\mathcal{X}_{[K,\infty)}(z),$$

则通过近似的讨论, 可证明公式 (12.3.43) 仍然成立. 余下只需如 a) 一样进行计算即可 (练习 12.13).

美式期权

美式期权与欧式期权的差别是美式期权的持有者可在给定的到期时间 T 之前, 可自由选择执行时间 τ (保证的收益可以依赖于 τ 和 ω). 该执行时间 τ 可以是随机的 (依赖于 ω), 但是在 t 时刻决定是否执行仅依赖于直到 t 时刻之前的历史信息. 更准确地说, 要求对任意的 t,

$$\{\omega;\ \tau(\omega)\leqslant t\}\in\mathcal{F}_t^{(m)},$$

即 τ 必须是 $\mathcal{F}_t^{(m)}$ 停时 (定义 7.2.1).

定义 12.3.9 一个美式未定 (或有)T 权益是一个 $\mathcal{F}_t^{(m)}$ 适应的、(t,ω) 可测的, 及几乎必然下有界连续随机过程 $F(t)=F(t,\omega);\ t\in[0,T],\ \omega\in\Omega$. 权益 $F(t,\omega)$ 上的美式期权是给予期权持有者有权 (无义务) 选择任意停时 $\tau(\omega)\leqslant T$ 作为期权的执行时刻, 且得到相应的收益 $F(\tau(\omega),\omega)$.

设 $F(t)=F(t,\omega)$ 是一个美式未定权益. 假如有一个保证: 可自由选择时间 (停时)$\tau(\omega)\leqslant T$, 得到收益为 $F(\tau(\omega),\omega)$. 对这样的保证, 你愿意付出多大的代价? 重做如定义 12.3.1 的讨论: 如果作为买者, 为这个保证付出价格 y, 在这个初始财富为 $-y$ 时, 必定尽可能的找到一个停时 $\tau\leqslant T$, 及容许的证券组合 φ 使得

$$V_{-y}^{\varphi}(\tau(\omega),\omega)+F(\tau(\omega),\omega)\geqslant 0\ \text{ a.s.}$$

因此买者愿付出的最高的价格 $p=p_A(F)$(美式未定权益 F 的买方价格) 是

$$p_A(F)=\sup\Big\{y:\ \text{存在停时 } \tau\leqslant T \text{ 及容许的证券组合 } \varphi \text{ 使得}$$

$$V_{-y}^{\varphi}(\tau(\omega),\omega):=-y+\int_0^{\tau(\omega)}\varphi(s)dX(s)\geqslant -F(\tau(\omega),\omega)\ \text{a.s.}\Big\}. \quad (12.3.49)$$

另一方面, 卖者可做如下讨论: 卖方为这个保证接受价格 z, 在初始财富为 z 时, 尽可能找到一个容许的证券组合 ψ, 使得它产生的价值过程在任何时候都不会低于承诺支付给买方的数量, 即

$$V_z^{\psi}(t,\omega)\geqslant F(t,\omega)\ \text{a.s.}\ \forall\ t\in[0,T],$$

因此卖者愿接受的最低价格 $q = q_A(F)$(美式未定权益的卖方价格) 是

$$q_A(F) = \inf\Big\{z:\ \text{存在容许的证券组合 } \psi \text{ 使得对任意的} t \in [0,T] \text{有}$$
$$V_z^{\psi}(t,\omega) := z + \int_0^t \psi(s)dX(s) \geqslant F(t,\omega) \ \text{ a.s.}\Big\}. \tag{12.3.50}$$

现在可以证明类似于定理 12.3.2 的一个结果, 它主要归功于 Bensoussan(1984) 和 Karatzas(1988).

定理 12.3.10 (美式期权定价公式) a) 假定 (12.2.12) 和 (12.2.13) 成立, Q 如 (12.2.2), $F(t) = F(t,\omega)$; $t \in [0,T]$ 是一个美式未定 T 权益, 使得

$$\sup_{\tau \leqslant T} E_Q[\xi(\tau)F(\tau)] < \infty, \tag{12.3.51}$$

那么

$$p_A(F) \leqslant \sup_{\tau \leqslant T} E_Q[\xi(\tau)F(\tau)] \leqslant q_A(F) \leqslant \infty. \tag{12.3.52}$$

b) 假定在 a) 的条件下且市场 $\{X(t)\}$ 是完备的. 那么

$$p_A(F) = \sup_{\tau \leqslant T} E_Q[\xi(\tau)F(\tau)] = q_A(F). \tag{12.3.53}$$

证明 a) 如定理 12.3.2 的证明过程一样. 假设 $y \in \mathbf{R}$, 存在停时 $\tau \leqslant T$ 和容许的证券组合 φ, 使得

$$V_{-y}^{\varphi}(\tau,\omega) = -y + \int_0^{\tau} \varphi(s)dX(s) \geqslant -F(\tau) \ \text{ a.s.}$$

那么有

$$-y + \int_0^{\tau} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(s)\xi(s)\sigma_i(s)d\tilde{B}(s) = \bar{V}_{-y}^{\varphi}(\tau) = \xi(\tau)V_{-y}^{\varphi}(\tau) \geqslant -\xi(\tau)F(\tau) \text{ a.s.}$$

由于 $\bar{V}_{-y}(t)$ 是一个 Q 鞅, 上式两边取 Q 期望得到

$$y \leqslant E_Q[\xi(\tau)F(\tau)] \leqslant \sup_{\tau \leqslant T} E_Q[\xi(\tau)F(\tau)],$$

因此得到

$$p_A(F) \leqslant \sup_{\tau \leqslant T} E_Q[\xi(\tau)F(\tau)]. \tag{12.3.54}$$

类似地, 对 $z \in \mathbf{R}$, 存在一个容许的证券组合 ψ 使得

$$V_z^{\psi}(t,\omega) = z + \int_0^t \psi(s)dX(s) \geqslant F(t) \text{ a.s.} \forall\, t \in [0,T],$$

那么如果 $\tau \leqslant T$ 是一个停时, 可得到

$$z+\int_0^\tau \sum_{i=1}^n \psi_i(s)\xi(s)\sigma_i(s)d\tilde{B}(s)=\bar{V}_z^\psi(\tau)=\xi(\tau)V_z^\psi(\tau)\geqslant \xi(\tau)F(\tau) \text{ a.s.}$$

两边取 Q 期望, 然后对所有的 $\tau \leqslant T$ 取上确界得到

$$z\geqslant \sup_{\tau\leqslant T} E_Q[\xi(\tau)F(\tau)],$$

于是

$$q_A(F)\geqslant \sup_{\tau\leqslant T} E_Q[\xi(\tau)F(\tau)]. \tag{12.3.55}$$

b) 当市场完备时, 选择停时 $\tau \leqslant T$. 定义

$$F_k(t)=F_k(t,\omega)=\begin{cases} k, & \text{如果 } F(t,\omega)\geqslant k,\\ F(t,\omega), & \text{如果 } F(t,\omega)<k,\end{cases}$$

记 $G_k(\omega)=X_0(T)\xi(\tau)F_k(\tau)$, 那么 G_k 是一个有界 T 权益. 由完备性可找到 $y_k\in \mathbf{R}$ 和证券组合 $\theta^{(k)}$, 使得

$$-y_k+\int_0^T \theta^{(k)}(s)dX(s)=-G_k(\omega) \text{ a.s.}$$

且 $-y_k+\int_0^t \theta^{(k)}(s)d\bar{X}(s)$ 是 Q 鞅. 由 (12.2.8) 和 (12.2.9), 有

$$-y_k+\int_0^T \theta^{(k)}(s)d\bar{X}(s)=-\xi(T)G_k(\omega)=-\xi(\tau)F_k(\tau),$$

因此

$$\begin{aligned}&-y_k+\int_0^\tau \theta^{(k)}(s)d\bar{X}(s)\\ &=E_Q\Big[-y_k+\int_0^T \theta^{(k)}(s)d\bar{X}(s)|\mathcal{F}_\tau^{(m)}\Big]\\ &=E_Q[-\xi(\tau)F_k(\tau)|\mathcal{F}_\tau^{(m)}]=-\xi(\tau)F_k(\tau),\end{aligned}$$

再根据 (12.2.8) 和 (12.2.9) 得到

$$-y_k+\int_0^\tau \theta^{(k)}(s)dX(s)=-F_k(\tau) \text{ a.s.}$$

且

$$y_k=E_Q[\xi(\tau)F_k(\tau)],$$

这表明了对权益 $F_k(t,\omega)$ 上的美式期权, 买方愿意接受任何形如 $E_Q[\xi(\tau)F_k(\tau)]$ 的价格, 其中 τ 为某一停时. 因此

$$p_A(F) \geqslant p_A(F_k) \geqslant \sup_{\tau \leqslant T} E_Q[\xi(\tau)F_k(\tau)].$$

令 $k \to \infty$, 由单调收敛定理可得到

$$p_A(F) \geqslant \sup_{\tau \leqslant T} E_Q[\xi(\tau)F(\tau)],$$

如果记

$$z = \sup_{0 \leqslant \tau \leqslant T} E_Q[\xi(\tau)F(\tau)], \tag{12.3.56}$$

那么只需证明存在一个容许的证券组合 $\theta(s,\omega)$ 超复制 $F(t,\omega)$, 即意味着

$$z + \int_0^t \theta(s,\omega)dX(s) \geqslant F(t,\omega) \ \ 对\ \text{a.a.}\ (t,\omega) \in [0,T] \times \Omega, \tag{12.3.57}$$

它的详细证明可见文献 (Karatzas, 1997, 定理 1.4.3). 这里仅给出大致思路.

定义 Snell 包络:

$$S(t) = \sup_{t \leqslant \tau \leqslant T} E_Q[\xi(\tau)F(\tau)|\mathcal{F}_t^{(m)}], \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

那么 $S(t)$ 相对于 Q 和 $\{\mathcal{F}_t^{(m)}\}$ 为上鞅, 由 Doob-Meyer 分解有

$$S(t) = M(t) - A(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

这里 $M(t)$ 相对于 Q 和 $\{\mathcal{F}_t^{(m)}\}$ 为鞅, 且 $M(0) = S(0) = z$, $A(t)$ 是一个增过程, $A(0) = 0$. 由引理 12.2.1, 鞅 M 可表示为关于 $\tilde{B}$ 的 Itô 积分. 因此存在某个 $\mathcal{F}_t^{(m)}$ 适应过程 $\phi(s,\omega)$, 使得

$$z + \int_0^t \phi(s,\omega)d\tilde{B}(s) = M(t) = S(t) + A(t) \geqslant S(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{12.3.58}$$

因为市场是完备的, 由定理 12.2.5 知 $\sigma(t,\omega)$ 有一个左逆 $\Lambda(t,\omega)$. 如果 $\hat{\theta} = (\theta_1, \cdots, \theta_n)$ 如下:

$$\hat{\theta}(t,\omega) = X_0(t)\phi(t,\omega)\Lambda(t,\omega),$$

那么由 (12.3.58) 和引理 12.2.4 得

$$z + \int_0^t \hat{\theta} d\bar{X} = z + \int_0^t \sum_{i=1}^n \xi\theta_i\sigma_i d\tilde{B} = z + \int_0^t \phi d\tilde{B} \geqslant S(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

故由引理 12.2.3 得

$$z + \int_0^t \theta(s,\omega)dX(s) \geqslant X_0(t)S(t) \geqslant X_0(t)\xi(t)F(t) = F(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

Itô 扩散情形：与最优停时的联系

定理 12.3.8 表明美式期权定价是一个最优停时问题. 一般地, 这个问题的解能由 Snell 包络表示 (El Karoui, 1981; Fakeev, 1970). 在 Itô 扩散情形, 可得到如第 10 章中讨论的最优停时问题. 现在就此进行更详细的讨论.

假定市场是一个 $(n+1)$ 维 Itô 扩散, $X(t) = (X_0(t), X_1(t), \cdots, X_n(t))$; $t \geqslant 0$, 其形式 (见 (12.1.1), (12.1.2)) 为

$$dX_0(t) = \rho(t, X(t))X_0(t)dt, \quad X_0(0) = x_0 > 0 \tag{12.3.59}$$

$$\begin{aligned} dX_i(t) &= \mu_i(t, X(t))dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(t, X(t))dB_j(t) \\ &= \mu_i(t, X(t))dt + \sigma_i(t, X(t))dB(t), \quad X_i(0) = x_i, \end{aligned} \tag{12.3.60}$$

这里 ρ, μ_i 和 σ_{ij} 是给定的函数, 满足定理 5.2.1 的条件. 而且, 假定美式权益 $F(t)$ 是 Markov 的, 即

$$F(t) = h(X(t)), \tag{12.3.61}$$

其中 $h: \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ 为下有界函数. 定义

$$Y(t) = \begin{pmatrix} s+t \\ X(t) \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n+2}, \tag{12.3.62}$$

记

$$g(y) = g(s, x) = x_0^{-1}h(x), \quad x = (x_0, x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1}, \tag{12.3.63}$$

那么 (12.3.53) 中的求价格问题:

$$p_A(F) = q_A(F) = \sup_{\tau \leqslant T} E_Q[\xi(\tau)F(\tau)] \tag{12.3.64}$$

可看成第 10.4 节中考虑的一般最优停时问题的特殊情形, 事实上, 如果记

$$\Phi(y) = \sup_{\tau \leqslant \tau_G} E_Q^y[g(Y(\tau))], \tag{12.3.65}$$

这里

$$\tau_G = \inf\{t > 0;\ s+t \geqslant T\} = T - s \tag{12.3.66}$$

是 Y_t 相对于区域:

$$G = \{(s, x);\ s < T\} \subset \mathbf{R}^{n+1} \tag{12.3.67}$$

的首次逸出时. 那么

$$p_A(F) = \Phi(0, 1, x_1, \cdots, x_n). \tag{12.3.68}$$

为了应用第10.4节的理论于问题(12.3.65), 必须按 $\tilde{B}(t)$ 重写方程 (12.3.59), (12.3.60), 利用 (12.2.12) 和 (12.2.3), 如 (12.3.24) 和 (12.3.25) 一样可得到

$$dX_0(t)=\rho(X(t))dt, \quad X_0(0)=x_0>0, \tag{12.3.69}$$

$$dX_i(t)=\rho(X(t))X_i(t)dt+\sigma_i(X(t))d\tilde{B}(t), \quad X_i(0)=x_i,\ 1\leqslant i\leqslant n, \tag{12.3.70}$$

概括如下:

定理 12.3.11　假定市场 $\{X(t)\}$ 有如 (12.3.59), (12.3.60) 的 Markov 形式, 它等价于 (12.3.69), (12.3.70). 美式权益 $F(t)$ 有 (12.3.61) 的形式. 那么美式期权的价格 $p_A(F)$ 是最优停时问题 (12.3.65) 在 $y=(0,1,x_1,\cdots,x_n)$ 时的解.

例 12.3.12 (美式看跌期权)　考虑 Black-Scholes 市场

$$dX_0(t)=\rho X_0(t)dt, \quad X_0(0)=1,$$
$$dX_1(t)=\alpha X_1(t)dt+\beta X_1(t)dB(t), \quad X_1(0)=x_1>0,$$

这里 ρ, α, $\beta\neq 0$ 都为常数. 按 $\tilde{B}$, 系统变成

$$dX_0(t)=\rho X_0(t)dt, \quad X_0(0)=1,$$
$$dX_1(t)=\rho X_1(t)dt+\beta X_1(t)d\tilde{B}(t), \quad X_1(0)=x_1>0,$$

因此 (12.3.62) 中定义的过程 $Y(t)$ 的生成元 L 为

$$Lf(s,x_0,x_1)=\frac{\partial f}{\partial s}+\rho x_0\frac{\partial f}{\partial x_0}+\rho x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{1}{2}\beta^2x_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \tag{12.3.71}$$

其中 $f\in C_0^2(\mathbf{R}^3)$.

据定理 10.4.1, 为了求 (12.3.63)~(12.3.65) 中的值函数 Φ, 先找一个 C^1 函数 ϕ 使得

$$\phi(s,x_0,x_1)\geqslant x_0^{-1}h(x_0,x_1), \quad \forall\ s<T, \tag{12.3.72}$$

$$\phi(T,x_0,x_1)=x_0^{-1}h(x_0,x_1), \tag{12.3.73}$$

定义连续域:

$$D=\{(s,x_0,x_1);\ \ \phi(s,x_0,x_1)>x_0^{-1}h(x_0,x_1)\}, \tag{12.3.74}$$

要求 ϕ 在 ∂D 外为 C^2, 且

$$\phi(s,x_0,x_1)\leqslant 0, \quad 在\ \bar{D}\ 外, \tag{12.3.75}$$

$$L\phi(s,x_0,x_1)=0, \quad 在\ D\ 上. \tag{12.3.76}$$

假如

$$F(t) = (K - X_1(t))^+ \text{ (美式看跌期权)},$$

那么 (12.3.63) 中的函数 g 为

$$g(s, x_0, x_1) = x_0^{-1}(K - x_1)^+ = e^{-\rho s}(K - x_1)^+.$$

变分不等式 (12.3.72)~(12.3.76) 的形式为

$$\phi(s, x_1) \geqslant e^{-\rho s}(K - x_1)^+, \quad \forall\, s < T, \tag{12.3.77}$$

$$\phi(T, x_1) = e^{-\rho T}(K - x_1)^+, \tag{12.3.78}$$

$$D = \{(s, x_1);\ \phi(s, x_1) > e^{-\rho s}(K - x_1)^+\}, \tag{12.3.79}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} + \rho x_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\beta^2 x_1^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} \leqslant 0, \quad \text{在 } \bar{D} \text{ 外}, \tag{12.3.80}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} + \rho x_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\beta^2 x_1^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} = 0, \quad \text{在 } D \text{ 内}. \tag{12.3.81}$$

此时不能如第 10 章那样提出因子 $e^{-\rho s}$, 因为那样会使 (12.3.78) 与 (12.3.81) 发生冲突.

如果找到了这样的 ϕ, 且定理 10.4.1 的假设成立, 则可得出

$$\phi(s, x_1) = \Phi(s, x_1),$$

因此 $p_A(F) = \phi(0, x_1)$ 是在 $t = 0$ 时期权的价格. 更且

$$\tau^* = \tau_D = \inf\{t > 0;\ (s + t, X_1(t)) \notin D\}$$

是相应的最优停时. 即执行美式期权的最优时间. 不幸的是, 即使在这种情形, 它的显式解析解也是很难 (可能不可能) 找到. 但有一些有趣的部分结果和好的近似方法见文献 (Barles et al., 1995; Bather, 1997; Jacka, 1991; Karatzas, 1997; Musiela, Rutkowski, 1997) 及其参考文献. 比如连续域 D(Jacka, 1991) 的形式为

$$D = \{(t, x_1) \in (-\infty, T) \times \mathbf{R},\ x_1 > f(t)\},$$

即 D 是 f 的图像的上方区域, $f : (0, T) \to \mathbf{R}$ 为某个连续的单调增函数.

因此问题是求函数 f. Barles 等 (1995) 中证明了

$$f(t) \sim K - \beta K \sqrt{(T - t)|\ln(T - t)|}, \quad \text{当 } t \to T^- \text{ 时},$$

它意味着

$$\frac{f(t) - K}{-\beta K \sqrt{(T - t)|\ln(T - t)|}} \to 1, \quad \text{当 } t \to T^- \text{ 时},$$

由此知, 连续域有图 12.1 中的形状, 但它的真正的形式仍是未知的. 对相应的美式看涨期权, 情形相对较为简单. 见练习 12.14.

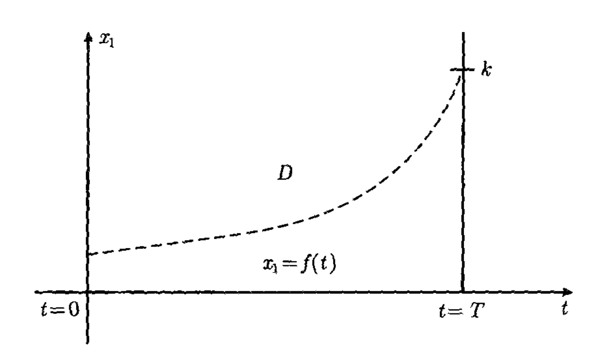


图 12.1　美式看跌期权的连续域图形

练　　习

12.1.　a) 证明价格过程 $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ 存在套利的充要条件是：规范化的价格过程 $\{\bar{X}(t)\}_{t\in[0,T]}$ 存在套利.

b) 假定 $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是规范化的. 证明：$\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ 存在套利的充要条件是存在容许的证券组合 θ 使得

$$V^\theta(0)\leqslant V^\theta(T)\ \text{ a.s. 且 } P[V^\theta(T)>V^\theta(0)]>0, \tag{12.3.82}$$

即在规范化市场, 对一个套利 θ, 不必要求 $V^\theta(0)=0$, 只需它的获利 $V^\theta(T)-V^\theta(0)$ 是非负的 a.s., 且有一个正的概率为正. 提示：如果 θ 如 (12.3.82), 定义 $\tilde\theta(t)=(\tilde\theta_0(t),\cdots,\tilde\theta_n(t))$ 如下：设 $\tilde\theta_i(t)=\theta_i(t)$, 对 $i=1,\cdots,n,t\in[0,T]$. 然后选择 $\tilde\theta_0(0)$, 使得 $V^{\tilde\theta}(0)=0$, 再由 (12.1.15) 来定义 $\tilde\theta_0(t)$, 使得 $\tilde\theta$ 为自筹资的. 那么

$$V^{\tilde\theta}(t)=\tilde\theta(t)\cdot X(t)=\int_0^t\tilde\theta(s)dX(s)=\int_0^t\theta(s)dX(s)=V^\theta(t)-V^\theta(0).$$

12.2. 设 $\theta(t)=(\theta_0,\cdots,\theta_n)$ 是常数证券组合, 证明 θ 是自筹资的.

12.3. 假设 $\{X(t)\}$ 是规范化市场, 且 (12.2.12) 和 (12.2.13) 成立, 假设 $n=m$ 且 σ 存在有界逆, 每个有界权益都是可达的. 证明对每个下有界权益 F, 如果

$$E_Q[F^2]<\infty,$$

则 F 是可达的. 提示：选择有界 T 权益 F_k 使得

$$\text{在 } L^2(Q) \text{ 中,}\quad F_k\to F \text{ 且 } E[F_k]=E[F].$$

由假定存在容许的证券组合 $\theta^{(k)}=(\theta_0^{(k)},\cdots,\theta_n^{(k)})$ 及常数 $V_k(0)$ 使得

$$F_k(\omega)=V_k(0)+\int_0^T\theta^{(k)}(s)dX(s)=V_k(0)+\int_0^T\hat\theta^{(k)}(s)\sigma(s)d\tilde B(s),$$

这里 $\hat\theta^{(k)}=(\theta_1^{(k)},\cdots,\theta_n^{(k)})$. 当 $k\to\infty$ 时, $V_k(0)=E_Q[F_k]\to E_Q[F]$. 由 Itô 等距, 序列 $\{\hat\theta^{(k)}\sigma\}_k$ 是 $L^2(\lambda\times Q)$ 中的 Cauchy 序列, 因此收敛. 故此存在容许的证券组合 θ 使得

$$F(\omega) = E_Q[F] + \int_0^T \theta(s) dX(s).$$

12.4. 设 $B(t)$ 为 1 维布朗运动, 证明存在 $\theta_1(t,\omega), \theta_2(t,\omega) \in \mathcal{W}$, 使得如果定义

$$V_1(t) = 1 + \int_0^t \theta_1(s,\omega) dB(s), \quad V_2(t) = 2 + \int_0^t \theta_2(s,\omega) dB(s); \quad t \in [0,1],$$

那么

$$V_1(1) = V_2(1) = 0$$

且

$$V_1(t) \geqslant 0, \ V_2(t) \geqslant 0, \ \text{对 a.a. } (t,\omega),$$

故在规范化市场中当 $n=1$, $X_1(t) = B(t)$ 时, $\theta_1(t,\omega)$ 和 $\theta_2(t,\omega)$ 是容许的证券组合且复制权益 $F(\omega) = 0$. 特别, 如果减弱定义 12.2.4 b) 中的鞅条件, 即使要求证券组合是容许的, 复制证券组合也没有唯一性 (注意, 如果要求 $\theta \in \mathcal{V}(0,1)$, 由定理 4.3.3, 它具有唯一性). 提示: 利用例 12.1.4, $M=-1$ 和 $M=-2$. 对 $i=1,2$, 再定义

$$\theta_i(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}, & 0 \leqslant t < \alpha_{-i}, \\ 0, & \alpha_{-i} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

且

$$V_i(t) = i + \int_0^t \theta_i(s) dB(s) = i + Y(t \wedge \alpha_{-i}), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

12.5. 证明引理 12.2.1 的第 1 部分, 即 (12.2.3) 中的 $\tilde{B}(t)$ 是一个 $\mathcal{F}_t^{(m)}$ 鞅 (见该引理后面的附注 b).

12.6.* 确定下面规范化市场 $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是否存在套利, 如果存在, 找出一个.

a) $n = m = 2$,

$$dX_1(t) = 3dt + dB_1(t) + dB_2(t),$$
$$dX_2(t) = -dt + dB_1(t) - dB_2(t).$$

b) $n = 2, m = 3$,

$$dX_1(t) = dt + dB_1(t) + dB_2(t) - dB_3(t),$$
$$dX_2(t) = 5dt - dB_1(t) + dB_2(t) + dB_3(t).$$

c) $n = 2, m = 3$,

$$dX_1(t) = dt + dB_1(t) + dB_2(t) - dB_3(t),$$
$$dX_2(t) = 5dt - dB_1(t) - dB_2(t) + dB_3(t).$$

d) $n = 2, m = 3$,

$$dX_1(t) = dt + dB_1(t) + dB_2(t) - dB_3(t),$$
$$dX_2(t) = -3dt - 3dB_1(t) - 3dB_2(t) + 3dB_3(t).$$

e) $(n=3, m=2)$,

$$dX_1(t) = dt + dB_1(t) + dB_2(t),$$
$$dX_2(t) = 2dt + dB_1(t) - dB_2(t),$$
$$dX_3(t) = 3dt - dB_1(t) + dB_2(t).$$

f) $n=3, m=2$,

$$dX_1(t) = dt + dB_1(t) + dB_2(t),$$
$$dX_2(t) = 2dt + dB_1(t) - dB_2(t),$$
$$dX_3(t) = -2dt - dB_1(t) + dB_2(t).$$

12.7.* 确定练习 12.6 中 a)-f) 中哪些无套利市场 $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ 是完备的. 哪些无套利市场是不完备的, 此时找出一个不可达的 T 权益.

12.8. 设 B_t 为 1 维布朗运动, 利用定理 12.3.3 找出 $z \in \mathbf{R}$ 及 $\phi(t,\omega) \in \mathcal{V}(0,T)$ 使得

$$F(\omega) = z + \int_0^T \phi(t,\omega)dB(t),$$

其中 $F(\omega)$ 为下列形式:

(i) $F(\omega) = B^2(T,\omega)$.

(ii) $F(\omega) = B^3(T,\omega)$.

(iii) $F(\omega) = \exp B(T,\omega)$.

与练习 4.14 中所用的方法进行比较.

12.9.* 设 B_t 为 n 维布朗运动, 利用定理 12.3.3, 对下面的情形求 $z \in \mathbf{R}$ 和 $\phi(t,\omega) \in \mathcal{V}^n(0,T)$, 使得

$$F(\omega) = z + \int_0^T \phi(t,\omega)dB(t).$$

(i) $F(\omega) = B^2(T,\omega)$ $(= B_1^2(T,\omega) + \cdots + B_n^2(T,\omega))$.

(ii) $F(\omega) = \exp(B_1(T,\omega) + \cdots + B_n(T,\omega))$.

12.10. 设 $X(t)$ 为几何布朗运动:

$$dX(t) = \alpha X(t)dt + \beta X(t)dB(t),$$

这里 α 和 β 都为常数, 利用定理 12.3.3 求 $z \in \mathbf{R}$ 和 $\phi(t,\omega) \in \mathcal{V}(0,T)$, 使得

$$X(T,\omega) = z + \int_0^T \phi(t,\omega)dB(t).$$

12.11. 假如市场为

$$dX_0(t) = \rho X_0(t)dt, \quad X_0(0) = 1,$$
$$dX_1(t) = (m - X_1(t))dt + \sigma dB(t), \quad X_1(0) = x_1 > 0,$$

即均值–回归 Ornstein-Uhlenben 过程这里 $\rho > 0,\ m > 0,\ \sigma \neq 0$ 都为常数.

a) 求欧式 T 权益 F 的价格 $E_Q[\xi(T)F]$, 其中

$$F(\omega) = X_1(T, \omega).$$

b) 求该权益的复制证券组合 $\theta(t) = (\theta_0(t), \theta_1(t))$. 提示: 如例 12.3.6 一样利用定理 12.3.5.

12.12.* 考虑市场 $(X_0(t), X_1(t)) \in \mathbf{R}^2$, 这里

$$dX_0(t) = \rho X_0(t)dt, \quad X_0(0) = 1, \ \rho > 0 \ (\text{常数}).$$

在下列情形中求欧式 T 权益 $F(\omega) = B(T, \omega)$ 的价格 $E_Q[\xi(T)F]$, 及相应的复制证券组合 $\theta(t) = (\theta_0(t), \theta_1(t))$.

a) $dX_1(t) = \alpha X_1(t)dt + \beta X_1(t)dB(t)$; α, β 都为常数, $\beta \neq 0$.

b) $dX_1(t) = cdB(t)$; $c \neq 0$ 为常数.

c) $dX_1(t) = \alpha X_1(t)dt + \sigma dB(t)$; α, σ 都为常数, $\sigma \neq 0$.

12.13. (经典 Black-Scholes 公式) 完成 Black-Scholes 期权定价公式 (12.3.45) 的详细证明, 及推论 12.3.8 中相应的复制证券组合公式 (12.3.48) 的证明.

12.14. (美式看涨期权) 设 $X(t) = (X_0(t), X_1(t))$ 如练习 12.13, 如果美式 T 权益为

$$F(t, \omega) = (X_1(t, \omega) - K)^+, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

那么相应的期权称为美式看涨期权. 据定理 12.3.10, 美式看涨期权定价公式为

$$p_A(F) = \sup_{\tau \leqslant T} E_Q[e^{-\rho\tau}(X_1(\tau) - K)^+].$$

证明:

$$p_A(F) = e^{-\rho T} E_Q[(X_1(T) - K)^+],$$

即如果要执行, 则在终端时刻 T 执行美式看涨期权总是最优的, 因此美式看涨期权与欧式看涨期权一致. 提示: 定义 $Y(t) = e^{-\rho t}(X_1(t) - K)$.

a) 证明: $Y(t)$ 是一个 Q 下鞅 (附录 C), 即

$$Y(t) \leqslant E_Q[Y(s)|\mathcal{F}_t], \quad \text{对 } s > t.$$

b) 利用 Jensen 不等式 (附录 B) 证明

$$Z(t) := e^{-\rho t}(X_1(t) - K)^+$$

也是一个 Q 下鞅.

c) 利用 Doob 停止定理 (见引理 10.1.3 e) 的证明) 完成论证.

12.15.* (永生的美式看跌期权) 解最优停时问题

$$\Phi(s, x) = \sup_{\tau \geqslant 0} E^x[e^{-\rho(s+\tau)}(K - X(\tau))^+],$$

这里

$$dX(t) = \alpha X(t)dt + \beta X(t)dB(t), \quad X(0) = x > 0,$$

$\rho > 0$, $K > 0$, α, $\beta \neq 0$ 都为常数. 如果 $\alpha = \rho$, 则 $\Phi(s, x)$ 为无限期 $(T = \infty)$ 美式看跌期权的价格. 提示: 如例 10.4.2 一样.

12.16.* 设

$$dX_0(t) = \rho X_0(t)dt, \quad X_0(0) = 1,$$
$$dX_1(t) = \alpha X_1(t)dt + \beta X_1(t)dB(t), \quad X_1(0) = x_1 > 0$$

是经典的 Black-Scholes 市场. 对下面的欧式 T 权益, 求复制证券组合 $\theta(t) = (\theta_0(t), \theta_1(t))$.

a) $F(\omega) = (K - X_1(T, \omega))^+$(欧式看跌期权).

b) $F(\omega) = (X_1(T, \omega))^2$.

附注　在 a) 中有 $\theta_1(t) < 0$, $\forall\, t \in [0, T]$. 它意味着为了复制欧式看跌期权, 必须卖空标的资产. 如果复制欧式看涨期权, 则不必卖空. 见 (12.3.48).

附录A　正态随机变量

定义 A.13　设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为概率空间, 随机变量 $X: \Omega \to \mathbf{R}$ 称为正态的, 如果它的分布密度函数为

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right), \tag{A.1}$$

这里 m, $\sigma > 0$, 都是常数, 即有

$$P[X \in G] = \int_G p_X(x)dx, \quad \text{任意的 Borel 集 } G \subset \mathbf{R},$$

此时

$$E[X] = \int_\Omega X dP = \int_{\mathbf{R}} x p_X(x) dx = m, \tag{A.2}$$

$$\mathrm{var}[X] = E[(X-m)^2] = \int_{\mathbf{R}} (x-m)^2 p_X(x) dx = \sigma^2, \tag{A.3}$$

更一般地, 随机变量 $X: \Omega \to \mathbf{R}^n$ 为 (多维) 正态的, 如果它的分布密度函数为

$$p_X(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j,k}(x_j - m_j)a_{jk}(x_k - m_k)\right), \tag{A.4}$$

这里 $m = (m_1, \cdots, m_n) \in \mathbf{R}^n$, $C^{-1} = A = [a_{jk}] \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 是对称正定矩阵. 此时

$$E[X] = m, \tag{A.5}$$

$A^{-1} = C = [c_{jk}]$ 是 X 的协方差矩阵, 即

$$c_{jk} = E[(X_j - m_j)(X_k - m_k)]. \tag{A.6}$$

定义 A.14　随机变量 $X: \Omega \to \mathbf{R}^n$ 的特征函数 $\phi_X: \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ ($\mathbf{C}$ 表示复数域). 定义为

$$\phi_X(u_1, \cdots, u_n) = E[\exp(i(u_1X_1 + \cdots + u_nX_n))] = \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\langle u, x\rangle} \cdot P[X \in dx], \tag{A.7}$$

这里 $\langle u, x\rangle = u_1x_1 + \cdots + u_nx_n$ ($i \in \mathbf{C}$ 为虚数单位), 即 ϕ_X 是 X(或更准确地说是测度 $P[X \in dx]$) 的 Fourier 变换.

定理 A.15　X 的特征函数唯一地确定了 X 的分布.

不难证明下面的定理:

定理 A.16　如果 $X:\Omega\to\mathbf{R}^n$ 是正态的, 服从 $\mathcal{N}(m,C)$. 那么

$$\phi_X(u_1,\cdots,u_n)=\exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{j,k}u_jc_{jk}u_k+i\sum_j u_jm_j\Big). \tag{A.8}$$

该定理经常用来扩张正态随机变量的概念: 定义 $X:\Omega\to\mathbf{R}^n$ 为正态的 (在扩张意义下), 如果对某个给定的半正定矩阵 $C=[c_{ij}]\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 及某个 $m\in\mathbf{R}^n$, ϕ_X 满足 (A.8). 由这个定义, C 不必可逆. 从现在起用这个扩张的正态定义. 在文中经常用到下面的结果:

定理 A.17　设 $X_j:\Omega\to\mathbf{R}$ 是随机变量, $1\leqslant j\leqslant n$. 那么 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 为正态的充要条件是对任意的 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbf{R}$,

$$Y=\lambda_1X_1+\cdots+\lambda_nX_n\text{为正态的}.$$

证明　如果 X 是正态的, 那么

$$E[\exp(iu(\lambda_1X_1+\cdots+\lambda_nX_n))]=\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\sum_{j,k}\lambda_jc_{jk}\lambda_k+iu\sum_j\lambda_jm_j\right),$$

因此 Y 是正态的, 且 $E[Y]=\sum\limits_j\lambda_jm_j,\mathrm{var}[Y]=\sum\limits_{j,k}\lambda_jc_{jk}\lambda_k$.

相反地, 如果 $Y=\lambda_1X_1+\cdots+\lambda_nX_n$ 是正态的, 且 $E[Y]=m,\mathrm{var}[Y]=\sigma^2$, 那么

$$E[\exp(iu(\lambda_1X_1+\cdots+\lambda_nX_n))]=\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\sigma^2+ium\right),$$

这里

$$\begin{aligned}m&=\sum_j\lambda_jE[X_j],\\ \sigma^2&=E\Big[\Big(\sum_j\lambda_jX_j-\sum_j\lambda_jE[X_j]\Big)^2\Big]\\ &=E\Big[\Big(\sum_j\lambda_j(X_j-m_j)\Big)^2\Big]\\ &=\sum_{j,k}\lambda_j\lambda_kE[(X_j-m_j)(X_k-m_k)],\end{aligned}$$

其中 $m_j=E[X_j]$, 因此 X 是正态的.

定理 A.18　设 Y_0, $Y_1,\cdots,Y_n$ 是 Ω 上随机变量, 假设 $X=(Y_0,Y_1,\cdots,Y_n)$ 是正态的, 且对每个 $j\geqslant 1$, Y_0 与 Y_j 不相关, 即

$$E[(Y_0-E[Y_0])(Y_j-E[Y_j])]=0,\quad 1\leqslant j\leqslant n,$$

那么 Y_0 与 $\{Y_1,\cdots,Y_n\}$ 独立.

证明　必须证明对所有的 Borel 集 $G_0,G_1,\cdots,G_n\subset\mathbf{R}$:

$$P[Y_0\in G_0,Y_1\in G_1,\cdots,Y_n\in G_n]=P[Y_0\in G_0]\cdot P[Y_1\in G_1,\cdots,Y_n\in G_n].\quad\text{(A.9)}$$

由于协方差矩阵 $c_{jk}=E[(Y_j-E[Y_j])(Y_k-E[Y_k])]$ 的第 1 行 (和第 1 列) 元素只有 $c_{00}=\mathrm{var}[Y_0]$ 不为零. 因此 X 的特征函数满足:

$$\phi_X(u_0,u_1,\cdots,u_n)=\phi_{Y_0}(u_0)\cdot\phi_{(Y_1,\cdots,Y_n)}(u_1,\cdots,u_n),$$

它与 (A.9) 等价.

最后建立下面的结论:

定理 A.19　假设对任意的 k, $X_k:\Omega\to\mathbf{R}^n$ 是正态的, 且在 $L^2(\Omega)$ 中 $X_k\to X$, 即

$$E[|X_k-X|^2]\to 0,\quad \text{当 } k\to\infty \text{ 时},$$

那么 X 是正态的.

证明　因为 $|e^{i\langle u,x\rangle}-e^{i\langle u,y\rangle}|<|u|\cdot|x-y|$. 可得当 $k\to\infty$ 时,

$$E[\{\exp(i\langle u,X_k\rangle)-\exp(i\langle u,X\rangle)\}^2]\leqslant|u|^2\cdot E[|X_k-X|^2]\to 0,$$

因此当 $k\to\infty$ 时,

$$E[\exp(i\langle u,X_k\rangle)]\to E[\exp(i\langle u,X\rangle)],$$

故此 X 是正态的, 且 $E[X]=\lim E[X_k]$, 协方差矩阵 $C=\lim C_k$, 其中 C_k 表示 X_k 的协方差矩阵.

附录B　条 件 期 望

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个概率空间. $X : \Omega \to \mathbf{R}^n$ 是一个随机变量, $E[|X|] < \infty$. 如果 $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ 是一个 σ 代数. 那么对给定的 $\mathcal{H}$, X 的条件期望表示为 $E[X|\mathcal{H}]$. 它的定义如下:

定义 B.1　$E[X|\mathcal{H}]$ 是从 Ω 到 $\mathbf{R}^n$ 的 (a.s. 唯一的) 函数满足:

(1) $E[X|\mathcal{H}]$ 是 $\mathcal{H}$ 可测的.

(2) $\int_H E[X|\mathcal{H}]dP = \int_H XdP, \forall\ H \in \mathcal{H}$.

$E[X|\mathcal{H}]$ 的存在性与唯一性可由 Radon-Nikodym 定理得出. 设 μ 是 $\mathcal{H}$ 上的测度, 定义

$$\mu(H) = \int_H XdP, \quad H \in \mathcal{H},$$

那么 μ 相对于 $P \mid \mathcal{H}$ 是绝对连续的. 因此存在一个 Ω 上的 $P \mid \mathcal{H}$ 唯一的、$\mathcal{H}$ 可测的函数 F 使得

$$\mu(H) = \int_H FdP, \quad \forall\ H \in \mathcal{H},$$

因此 $E[X|\mathcal{H}] := F$ 就是要找的函数, 它相对于测度 $P \mid \mathcal{H}$ 是 a.s. 唯一的. 注意 (2) 等价于:

(2)$'$ $\int_\Omega Z \cdot E[X|\mathcal{H}]dP = \int_\Omega Z \cdot XdP$, 对任意的 $\mathcal{H}$ 可测的 Z 都成立.

下面列出条件期望的一些基本性质:

定理 B.2　假定 $Y : \Omega \to \mathbf{R}^n$ 是另外的随机变量, $E[|Y|] < \infty$, $a, b \in \mathbf{R}$, 那么

a) $E[aX + bY|\mathcal{H}] = aE[X|\mathcal{H}] + bE[Y|\mathcal{H}]$.

b) $E[E[X|\mathcal{H}]] = E[X]$.

c) $E[X|\mathcal{H}] = X$, 如果 X 是 $\mathcal{H}$ 可测的.

d) $E[X|\mathcal{H}] = E[X]$, 如果 X 与 $\mathcal{H}$ 独立.

e) $E[Y \cdot X|\mathcal{H}] = Y \cdot E[X|\mathcal{H}]$, 如果 Y 是 $\mathcal{H}$ 可测的, 这里 $\cdot$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中的常用的内积.

证明　d) 如果 X 与 $\mathcal{H}$ 独立, 则对 $H \in \mathcal{H}$,

$$\int_H XdP = \int_\Omega X \cdot \mathcal{X}_H dP = \int_\Omega XdP \cdot \int_\Omega \mathcal{X}_H dP = E[X] \cdot P(H),$$

因此常数 $E[X]$ 满足 (1) 和 (2).

e) 设 $H \in \mathcal{H}$, 先对 $Y = \mathcal{X}_H$(这里 $\mathcal{X}$ 表示指示函数) 的情形进行讨论. 对任意的 $G \in \mathcal{H}$,

$$\int_G Y \cdot E[X|\mathcal{H}]dP = \int_{G\cap H} E[X|\mathcal{H}]dP = \int_{G\cap H} XdP = \int_G YXdP,$$

因此, $Y \cdot E[X|\mathcal{H}]$ 满足 (1) 和 (2). 类似地, 对 Y 为简单函数

$$Y = \sum_{j=1}^{m} c_j \mathcal{X}_{H_j}, \quad H_j \in \mathcal{H},$$

也可得到该结论. 对一般情形, 可由简单函数逼近来得出结论.

定理 B.3 设 $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ 为 σ 代数, $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$. 那么

$$E[X|\mathcal{G}] = E[E[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}].$$

证明 如果 $G \in \mathcal{G}$, 那么 $G \in \mathcal{H}$, 因此

$$\int_G E[X|\mathcal{H}]dP = \int_G XdP,$$

故由唯一性知 $E[E[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}] = E[X|\mathcal{G}]$.

下面的结果可见文献 (Chung, 1974, 定理 9.1.4).

定理 B.4 (Jensen 不等式) 如果 $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是凸的, 且 $E[|\phi(X)|] < \infty$, 那么

$$\phi(E[X|\mathcal{H}]) \leqslant E[\phi(X)|\mathcal{H}].$$

推论 B.5 (i) $|E[X|\mathcal{H}]| \leqslant E[|X||\mathcal{H}]$.

(ii) $|E[X|\mathcal{H}]|^2 \leqslant E[|X|^2|\mathcal{H}]$.

推论 B.6 如果在 L^2 中 $X_n \to X$, 那么在 L^2 中 $E[X_n|\mathcal{H}] \to E[X|\mathcal{H}]$.

附录C　一致可积性与鞅收敛

本节对在正文中有应用的一些基本结果和定义作一个简单的概述. 它们的证明及更多的信息可参考文献 (Doob, 1984; Liptser, Shiryaev, 1977; Meyer, 1966; Williams, 1979).

定义 C.1　设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个概率空间, 对于 Ω 上的实可测函数族 $\{f_j\}_{j\in J}$, 如果满足:

$$\lim_{M\to\infty}\left(\sup_{j\in J}\left\{\int_{\{|f_j|>M\}}|f_j|dP\right\}\right)=0,$$

则称它是一致可积的.

利用下面的概念可得到一致可积性的最有用的测试方法.

定义 C.2　一个函数 $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ 称为一个 u.i.(一致可积性) 检验函数, 如果 ψ 是单调增的、凸的 (即 $\psi(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda\psi(x)+(1-\lambda)\psi(y)$, 对 $\forall\ x,\ y\in[0,\infty),\ \lambda\in[0,1]$), 且

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}=\infty,$$

比如, $p>1$ 时, $\psi(x)=x^p$ 是一个 u.i. 检验函数, 而 $p=1$ 时, 它不是.

定理 C.3　族 $\{f_j\}_{j\in J}$ 为一致可积的充要条件是存在一个 u.i. 检验函数 ψ 使得

$$\sup_{j\in J}\left\{\int\psi(|f_j|)dP\right\}<\infty.$$

一致可积性有用的一个主要理由是下面的结果, 它可看作积分论中各种收敛定理的一个终极推广.

定理 C.4　假设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 Ω 上的实可测函数序列, 满足

$$\lim_{k\to\infty}f_k(\omega)=f(\omega)\quad \text{对 a.a. } \omega,$$

那么下列条件等价:

1) $\{f_k\}$ 是一致可积的.

2) $f\in L^1(P)$, 且在 $L^1(P)$ 中 $f_k\to f$, 即当 $k\to\infty$ 时, $\int|f_k-f|dP\to 0$. 注意到 2) 隐含着当 $k\to\infty$ 时,

$$\int f_k dP\to\int f dP.$$

一致可积性的一个重要应用是鞅收敛定理.

设 $(\Omega, \mathcal{N}, P)$ 是一个概率空间. $\{\mathcal{N}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一个递增的 σ 代数族, $\mathcal{N}_t \subset \mathcal{N}$, $\forall\, t$. 一个随机过程 $N_t : \Omega \to \mathbf{R}$ 称为上鞅 (相对于 $\{\mathcal{N}_t\}$), 如果对任意的 t, N_t 是 $\mathcal{N}_t$ 适应的, $E[|N_t|] < \infty$, 且

$$N_t \geqslant E[N_s|\mathcal{N}_t], \quad \forall\, s > t, \tag{C.1}$$

类似地, 如果对 $\forall\, s > t$, (C.1) 的不等式相反, 那么称 N_t 为下鞅. 如果 (C.1) 为等式, 则称 N_t 为鞅.

如通常一样, 假定 $\mathcal{N}_t$ 包含了 $\mathcal{N}$ 的所有的零集. 对 a.a. ω, $t \to N_t(\omega)$ 是右连续的. $\{\mathcal{N}_t\}$ 是右连续的, 即意味着: $\mathcal{N}_t = \cap_{s>t}\mathcal{N}_s$, $\forall\, t \geqslant 0$.

定理 C.5 (Doob 鞅收敛定理 I) 设 N_t 是一个右连续上鞅且有性质

$$\sup_{t>0} E[N_t^-] < \infty,$$

这里 $N_t^- = \max(-N_t, 0)$. 那么对 a.a. ω, 极限

$$N(\omega) = \lim_{t\to\infty} N_t(\omega)$$

存在, 且 $E[N^-] < \infty$.

注意, 上述收敛在 $L^1(P)$ 中不一定成立. 为了得到这点, 需要一致可积性.

定理 C.6 (Doob 鞅收敛定理 II) 设 N_t 是一个连续上鞅, 那么下列条件等价:

1) $\{N_t\}_{t\geqslant 0}$ 是一致可积的.

2) 存在 $N \in L^1(P)$ 使得 $N_t \to N$ a.e. (P), 且在 $L^1(P)$ 中, $N_t \to N$, 即当 $t \to \infty$ 时, $\int |N_t - N| dP \to 0$.

结合定理 C.6 和 C.3 (其中 $\psi(x) = x^p$) 可得到:

推论 C.7 设 M_t 是一个连续鞅, 使得对某个 $p > 1$,

$$\sup_{t>0} E[|M_t|^p] < \infty,$$

那么存在 $M \in L^1(P)$, 使得 $M_t \to M$ a.e. (P), 且当 $t \to \infty$ 时, $\int |M_t - M| dP \to 0$.

最后在离散化情形, 对上/下鞅 $\{N_k, \mathcal{N}_k\}$, $k = 1, 2, \cdots$ 也可得到类似的结果, 当然此时没有连续性假定. 例如有下面的结果, 它在第 9 章中用到.

推论 C.8 设 M_k; $k = 1, 2, \cdots$ 是离散时间鞅, 且假定对某个 $p > 1$,

$$\sup_{k} E[|M_k|^p] < \infty,$$

那么存在 $M \in L^1(P)$, 使得 $M_k \to M$ a.e. (P), 且当 $k \to \infty$ 时, $\int |M_k - M| dP \to 0$.

推论 C.9　设 $X \in L^1(P)$, $\{\mathcal{N}_k\}_{k=1}^\infty$ 是一个递增 σ 代数族, $\mathcal{N}_k \subset \mathcal{F}$. 定义 $\mathcal{N}_\infty$ 为 $\{\mathcal{N}_k\}_{k=1}^\infty$ 生成的 σ 代数. 那么当 $k \to \infty$ 时,

$$E[X|\mathcal{N}_k] \to E[X|\mathcal{N}_\infty] \quad \text{a.e. } (P)$$

且在 $L^1(P)$ 中也收敛.

证明　$M_k := E[X|\mathcal{N}_k]$ 是一个 u.i. 鞅, 因此存在 $M \in L^1(P)$, 使得当 $k \to \infty$ 时, $M_k \to M$ a.e. (P), 且在 $L^1(P)$ 中也收敛. 余下只需证明

$$M = E[X|\mathcal{N}_\infty].$$

注意

$$\begin{aligned}\|M_k - E[M|\mathcal{N}_k]\|_{L^1(P)} &= \|E[M_k|\mathcal{N}_k] - E[M|\mathcal{N}_k]\|_{L^1(P)} \\ &\leqslant \|M_k - M\|_{L^1(P)} \to 0, \quad \text{当 } k \to \infty \text{ 时},\end{aligned}$$

因此, 如果 $F \in \mathcal{N}_{k_0}$, 对 $k \geqslant k_0$, 当 $k \to \infty$ 时, 有

$$\int_F (X - M)dP = \int_F E[X - M|\mathcal{N}_k]dP = \int_F (M_k - E[M|\mathcal{N}_k])dP \to 0,$$

于是

$$\int_F (X - M)dP = 0, \quad \forall\, F \in \cup_{k=1}^\infty \mathcal{N}_k,$$

故有

$$E[X|\mathcal{N}_\infty] = E[M|\mathcal{N}_\infty] = M.$$

附录D　一个逼近结果

该附录中证明了一个逼近结果, 它在定理 10.4.1 中得到了应用, 其中概念如前.

定理 D.1　设 $D \subset V \subset \mathbf{R}^n$ 是开集, 满足

$$\partial D \text{ 是一个 Lipschitz 面.} \tag{D.1}$$

设 $\phi : \bar{V} \to \mathbf{R}$ 满足下面的性质:

$$\phi \in C^1(V) \cap C(\bar{V}), \tag{D.2}$$

$$\phi \in C^2(V \setminus \partial D), \quad \text{且在 } \partial D \text{ 附近 } \phi \text{ 的二阶导数是局部有界的}, \tag{D.3}$$

那么存在一个函数序列 $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$, 其中 $\phi_j \in C^2(V) \cap C(\bar{V})$ 满足: 当 $j \to \infty$ 时,

$$\text{在 } \bar{V} \text{ 的紧子集上 } \phi_j \to \phi \text{ 一致收敛}, \tag{D.4}$$

$$\text{在 } V \setminus \partial D \text{ 的紧子集上 } L\phi_j \to L\phi \text{ 一致收敛}, \tag{D.5}$$

$$\{L\phi_j\}_{j=1}^{\infty} \text{ 在 V 上是局部有界的.} \tag{D.6}$$

证明　可以假设 ϕ 被扩张成整个 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数. 选择一个 C^∞ 函数 $\eta : \mathbf{R}^n \to [0, \infty)$, 它具有紧支集且

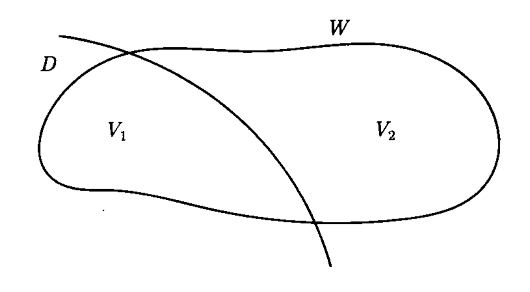
$$\int_{\mathbf{R}^n} \eta(y)dy = 1. \tag{D.7}$$

记

$$\eta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \ \varepsilon > 0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \tag{D.8}$$

固定序列 $\varepsilon_j \downarrow 0$, 定义

$$\phi_j(x) = (\phi * \eta_{\varepsilon_j})(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \phi(x-z)\eta_{\varepsilon_j}(z)dz = \int_{\mathbf{R}^n} \phi(y)\eta_{\varepsilon_j}(x-y)dy, \tag{D.9}$$



即 ϕ_j 是 ϕ 与 η_{ε_j} 的卷积. 众所周知在 $\bar{V}$ 的任意紧子集上, $\phi_j(x)$ 一致收敛于 $\phi(x)$(Folland, 1984, 定理 8.14(c)). 注意由于 η 有紧支集, 故不必假定 ϕ 是全局有界的, 只需局部有界即可 (可由连续性推得).

下面证明 (D.4)~(D.6). 设 $W \subset V$ 是开集且有 Lipschitz 边界. 记 $V_1 = W \cap D$, $V_2 = W \setminus \bar{D}$ 那么 V_1, V_2 是 Lipschitz 域, 对 $i = 1$, 2 及 $x \in W \setminus \partial D$ 利用分部积分得

$$\begin{aligned}&\int_{V_i} \phi(y) \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_l} \eta_{\varepsilon_j}(x-y)dy\\&= \int_{\partial V_i} \phi(y) \frac{\partial}{\partial y_l} \eta_{\varepsilon_j}(x-y) n_{ik} d\nu(y) - \int_{V_i} \frac{\partial \phi}{\partial y_k}(y) \frac{\partial}{\partial y_l} \eta_{\varepsilon_j}(x-y)dy, \qquad (D.10)\end{aligned}$$

这里 n_{ik} 表示从 V_i 的边界 ∂V_i 处外单位法向 n_i 的第 k 个分量 (相对于 ∂V_i 的面测度 ν, 外法向几乎处处存在, 因为 ∂V_i 是 Lipschitz 面). 又由分部积分法得到

$$\begin{aligned}&\int_{V_i} \frac{\partial \phi}{\partial y_k}(y) \frac{\partial}{\partial y_l} \eta_{\varepsilon_j}(x-y)dy\\&= \int_{\partial V_i} \frac{\partial \phi}{\partial y_k}(y) \eta_{\varepsilon_j}(x-y) n_{il} d\nu(y) - \int_{V_i} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_k \partial y_l}(y) \eta_{\varepsilon_j}(x-y)dy. \qquad (D.11)\end{aligned}$$

结合 (D.10) 和 (D.11) 得到

$$\begin{aligned}&\int_{V_i} \phi(y) \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_l} \eta_{\varepsilon_j}(x-y)dy\\&= \int_{\partial V_i} \left[\phi(y) \frac{\partial}{\partial y_l} \eta_{\varepsilon_j}(x-y) n_{ik} - \frac{\partial \phi}{\partial y_k}(y) \eta_{\varepsilon_j}(x-y) n_{il}\right] d\nu(y)\\&\quad + \int_{V_i} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_k \partial y_l}(y) \eta_{\varepsilon_j}(x-y)dy, \quad i = 1, 2. \qquad (D.12)\end{aligned}$$

在 $\partial V_1 \cap \partial V_2$ 上, 对 V_i 的外单位法向量是对 V_{3-i} 的内单位法向量, 故有

$$\begin{aligned}&\int_{W} \phi(y) \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_l} \eta_{\varepsilon_j}(x-y)dy\\&= \int_{\partial W} \left\{\phi(y) \frac{\partial}{\partial y_l} \eta_{\varepsilon_j}(x-y) N_k - \frac{\partial \phi}{\partial y_k}(y) \eta_{\varepsilon_j}(x-y) N_l\right\} d\nu(y)\\&\quad + \int_{W} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_k \partial y_l}(y) \eta_{\varepsilon_j}(x-y)dy, \qquad (D.13)\end{aligned}$$

这里 N_k, N_l 是 W 的边界 ∂W 处的外单位法向 N 的第 k, l 个分量. 如果固定 $x \in W \setminus \partial D$, 那么对足够大的 j, 当 $y \notin W$ 时, 有 $\eta_{\varepsilon_j}(x-y) = 0$. 对这样的 j, 由 (D.13) 得

$$\int_{\mathbf{R}^n} \phi(y) \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_l} \eta_{\varepsilon_j}(x-y)dy = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_k \partial y_l}(y) \eta_{\varepsilon_j}(x-y)dy, \qquad (D.14)$$

换句话说, 已经证明了

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}\phi_j(x) = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y_k \partial y_l} * \eta_{\varepsilon_j}\right)(x), \quad x \in V \setminus \partial D. \tag{D.15}$$

类似地, 把分部积分应用到 W 上, 如果 j 足够大, 有

$$\int_W \phi(y)\frac{\partial}{\partial y_k}\eta_{\varepsilon_j}(x-y)dy = -\int_W \frac{\partial \phi}{\partial y_k}(y)\eta_{\varepsilon_j}(x-y)dy$$

从中得出

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\phi_j(x) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_k} * \eta_{\varepsilon_j}\right)(x), \quad x \in V. \tag{D.16}$$

从 (D.15) 和 (D.16), 结合 Folland(1984), 定理 8.14(c) 可得到, 当 $j \to \infty$ 时,

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial x_k} \to \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \quad \text{在 } V \text{ 的紧子集上一致收敛}, \tag{D.17}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x_k \partial x_l} \to \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_l} \quad \text{在 } V \setminus \partial D \text{的紧子集上一致收敛}, \tag{D.18}$$

而且, $\left\{\frac{\partial \phi_j}{\partial x_k}\right\}_{j=1}^{\infty}$ 和 $\left\{\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x_k \partial x_l}\right\}_{j=1}^{\infty}$ 在 V 上是局部有界的, 因此 (D.4)~(D.6) 成立.

某些练习的附加提示和解答

2.4. a) 记 $A=\{\omega;\ |X(\omega)|\geqslant\lambda\}$. 那么

$$\int_\Omega |X(\omega)|^p dP(\omega)\geqslant\int_A |X(\omega)|^p dP(\omega)\geqslant\lambda^p P(A).$$

b) 由 a) 有 (令 $p=1$)

$$P[|X|\geqslant\lambda]=P[\exp(k|X|)\geqslant\exp(k\lambda)]\leqslant\exp(-k\lambda)E[\exp(k|X|)].$$

2.6. $P\left(\bigcap_{m=1}^\infty\bigcup_{k=m}^\infty A_k\right)=\lim_{m\to\infty}P\left(\bigcup_{k=m}^\infty A_k\right)\leqslant\overline{\lim}_{m\to\infty}\sum_{k=m}^\infty P(A_k)=0,$

这是因为 $\sum_{k=1}^\infty P(A_k)<\infty$. 因此

$$\begin{aligned}P(\{\omega;\ \omega\ \text{属于无穷多个}\ A_k\})&=P(\{\omega;\ (\forall m)(\exists\, k\geqslant m)\ \text{使得}\ \omega\in A_k\})\\&=P\left(\left\{\omega;\omega\in\bigcap_{m=1}^\infty\bigcup_{k=m}^\infty A_k\right\}\right)=0.\end{aligned}$$

2.7. a) 必须证明:

(i) $\phi\in\mathcal{G}$.

(ii) $F\in\mathcal{G}\Rightarrow F^C\in\mathcal{G}$.

(iii) $F_1,\cdots,F_k\in\mathcal{G}\Rightarrow F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_k\in\mathcal{G}$.

因为 $\mathcal{G}$ 中的每个元素 F 都是某些 G_i 的并, 上面几点容易证明.

b) 设 $\mathcal{F}$ 是 Ω 的子集得到的一个有限 σ 代数. 对每个 $x\in\Omega$, 定义

$$F_x=\cap\{F\in\mathcal{F};\ x\in F\},$$

因为 $\mathcal{F}$ 是有限的, 可得 $F_x\in\mathcal{F}$, 且显然 F_x 是 $\mathcal{F}$ 中包含 x 的最小的集. 要求对给定的 $x,\ y\in\Omega$, 下面成立: (i) $F_x\cap F_y=\varnothing$ 或 $F_x=F_y$.

为证明这点, 用反证法. 假定

(ii) $F_x\cap F_y\neq\varnothing$ 且 $F_x\neq F_y$, $F_x\setminus F_y\neq\varnothing$.

那么最多两种可能:

(1) $x\in F_x\cap F_y$, 那么 $F_x\cap F_y$ 是 $\mathcal{F}$ 中包含 x 的集, 且它严格地小于 F_x, 这是不可能的.

(2) $x\in F_x\setminus F_y$, 那么 $F_x\setminus F_y$ 是 $\mathcal{F}$ 中包含 x 的集, 且它严格地小于 F_x, 这是不可能的.

因此 (i) 得证, 故此存在 $x_1,\cdots,x_m\in\Omega$ 使得

$$F_{x_1},\ F_{x_2},\ \cdots,\ F_{x_m}$$

形成 Ω 的一个分解. 于是每个 $F \in \mathcal{F}$ 都是某些 F_{x_i} 的不交并. 这样 $\mathcal{F}$ 具有 a) 中描述的 $\mathcal{G}$ 的形式.

c) 设 $X: \Omega \to \mathbf{R}$ 是 $\mathcal{F}$ 可测的. 那么对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 有

$$\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = c\} = X^{-1}(\{c\}) \in \mathcal{F},$$

因此在 F_i(这里 $F_i = F_{x_i}$ 如 b)) 的有限并集上, X 为常数值.

2.9. 对任意的 $(t, \omega) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$,

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } t = \omega, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases} \qquad Y_t(\omega) = 0,$$

得

$$P[X_t = Y_t] = P[X_t = 0] = P(\{\omega; \omega \neq t\}) = 1,$$

因此 X_t 是 Y_t 的一个修正.

2.13. 定义 $D_\rho = \{x \in \mathbf{R}^2;\ |x| < \rho\}$. 那么由 (2.2.2) 及 $n = 2$ 可得

$$P^0[B_t \in D_\rho] = (2\pi t)^{-1} \iint_{D_\rho} e^{-\frac{x^2+y^2}{2t}} dxdy,$$

引入极坐标

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta, \quad 0 \leqslant r \leqslant \rho,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

得到

$$\begin{aligned} P^0[B_t \in D_\rho] &= (2\pi t)^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^\rho r e^{-\frac{r^2}{2t}} drd\theta \\ &= (2\pi t)^{-1} \cdot 2\pi t(-e^{-\frac{r^2}{2t}}) \big|_0^\rho = 1 - e^{-\frac{\rho^2}{2t}}. \end{aligned}$$

2.14. B_t 停留在集 K 中的期望时间总长度为

$$\begin{aligned} E^x\left[\int_0^\infty \mathcal{X}_K(B_t)dt\right] &= \int_0^\infty P^x[B_t \in K]dt \\ &= \int_0^\infty (2\pi t)^{-n/2}dt \int_K e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} dy = 0, \end{aligned}$$

因为 K 是 Lebesgue 零测度集.

2.15. 由 (2.2.1), 替代 $y_j = Ux_j$, 再利用 $|Ux_j - Ux_{j-1}|^2 = |x_j - x_{j-1}|^2$, 可得

$$\begin{aligned} &P[\tilde{B}_{t_1} \in F_1, \cdots, \tilde{B}_{t_k} \in F_k] = P[B_{t_1} \in U^{-1}F_1, \cdots, B_{t_k} \in U^{-1}F_k] \\ &= \int_{U^{-1}F_1 \times \cdots \times U^{-1}F_k} p(t_1, 0, x_1)p(t_2 - t_1, x_1, x_2) \cdots p(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k)dx_1 \cdots dx_k \\ &= \int_{F_1 \times \cdots \times F_k} p(t_1, 0, y_1)p(t_2 - t_1, y_1, y_2) \cdots p(t_k - t_{k-1}, y_{k-1}, y_k)dy_1 \cdots dy_k \\ &= P[B_{t_1} \in F_1, \cdots, B_{t_k} \in F_k]. \end{aligned}$$

2.17. a) $E[(Y_n(t,\cdot)-t)^2] = E\left[\left(\sum_{k=0}^{2^n-1}(\Delta B_k)^2 - \sum_{k=0}^{2^n-1}2^{-n}t\right)^2\right]$

$$= E\left[\left\{\sum_{k=0}^{2^n-1}((\Delta B_k)^2 - 2^{-n}t)\right\}^2\right]$$

$$= E\left[\sum_{j=0,k=0}^{2^n-1}((\Delta B_j)^2 - 2^{-n}t)(\Delta B_k)^2 - 2^{-n}t)\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{2^n-1} E[((\Delta B_k)^2 - 2^{-n}t)^2] = \sum_{k=0}^{2^n-1} E[(\Delta B_k)^4 - 2\cdot 2^{-2n}t^2 + 2^{-2n}t^2]$$

$$= \sum_{k=0}^{2^n-1} 2\cdot 2^{-2n}t^2 = 2\cdot 2^{-n}t^2 \to 0,\quad 当\ t\to\infty\ 时.$$

b) 它可由下面的一般结论推出：如果一个实函数在某区间上的平方变差为正，那么在该区间上的全变差是无穷的.

3.1. 记 $\Delta X_j = X_{t_{j+1}} - X_{t_j}$，有

$$\begin{aligned} tB_t &= \sum_j \Delta(t_jB_j) = \sum_j (t_{j+1}B_{t_{j+1}} - t_jB_{t_j}) \\ &= \sum_j t_j\Delta B_j + \sum_j B_{j+1}\Delta t_j \\ &\to \int_0^t sdB_s + \int_0^t B_sds,\quad 当\ \Delta t_j\to 0\ 时. \end{aligned}$$

3.3. a) 设 X_t 相对于流 $\{\mathcal{N}_t\}_{t\geqslant 0}$ 为鞅. 那么 $\mathcal{H}_t^{(X)} \subseteq \mathcal{N}_t$. 对 $s>t$,

$$E[X_s|\mathcal{H}_t^{(X)}] = E[E[X_s|\mathcal{N}_t]|\mathcal{H}_t^{(X)}] = E[X_t|\mathcal{H}_t^{(X)}] = X_t.$$

b) 如果 X_t 相对于 $\mathcal{H}_t^{(X)}$ 是鞅，那么

$$E[X_t|\mathcal{H}_0^{(X)}] = X_0,$$

即

$$E[X_t] = E[X_0],\quad \forall\, t\geqslant 0.$$

c) 过程 $X_t := B_t^3$ 满足 (*)，但它不是鞅. 为了明白这点，选择 $s>t$，考虑

$$\begin{aligned} E[B_s^3|\mathcal{F}_t] &= E[(B_s - B_t)^3 + 3B_s^2B_t - 3B_sB_t^2 + B_t^3|\mathcal{F}_t] \\ &= 0 + 3B_tE[B_s^2|\mathcal{F}_t] - 3B_t^2E[B_s|\mathcal{F}_t] + B_t^3 \\ &= 3B_tE[(B_s - B_t)^2 + 2B_sB_t - B_t^2|\mathcal{F}_t] - 2B_t^3 \\ &= 3B_t(s-t) + 6B_t^3 - 3B_t^3 - 2B_t^3 = 3B_t(s-t) + B_t^3 \neq B_t^3. \end{aligned}$$

3.4. (i) 如果 $X_t = B_t + t$, 那么 $E[X_t] = B(0) + t \neq E[X_0]$, 因此 X_t 不满足练习 3.3.b) 的 (*), 故 X_t 不可能是鞅.

(ii) 如果 $X_t = B_t^2$, 那么 $E[X_t] = nt + B_0^2 \neq E[X_0]$, 因此 X_t 不可能是鞅.

(iii) 如果 $X_t = t^2 B_t - 2\int_0^t rB_r dr$, 那么对 $s > t$,

$$\begin{aligned}E[X_s|\mathcal{F}_t] &= E[s^2 B_s|\mathcal{F}_t] - 2\int_0^t rB_r dr - 2\int_t^s rE[B_r|\mathcal{F}_t]dr \\ &= s^2 B_t - 2\int_0^t rB_r dr - 2B_t\int_t^s r dr \\ &= s^2 B_t - 2\int_0^t rB_r dr - B_t(s^2 - t^2) \\ &= t^2 B_t - 2\int_0^t rB_r dr = X_t,\end{aligned}$$

因此 X_t 是鞅.

(iv) 如果 $X_t = B_1(t)B_2(t)$, 那么

$$\begin{aligned}E[X_s|\mathcal{F}_t] &= E[B_1(s)B_2(s)|\mathcal{F}_t] \\ &= E[(B_1(s) - B_1(t))(B_2(s) - B_2(t))|\mathcal{F}_t] + E[B_1(t)(B_2(s) - B_2(t))|\mathcal{F}_t] \\ &\quad + E[[B_2(t)(B_1(s) - B_1(t))|\mathcal{F}_t] + E[B_1(t)B_2(t)|\mathcal{F}_t] \\ &= E[(B_1(s) - B_1(t))(B_2(s) - B_2(t))] + 0 + 0 + B_1(t)B_2(t) \\ &= E[B_1(s) - B_1(t)]E[B_2(s) - B_2(t)] + B_1(t)B_2(t) \\ &= B_1(t)B_2(t) = X_t,\end{aligned}$$

因此 X_t 是鞅.

3.5. 为了证明 $M_t := B_t^2 - t$ 是鞅, 选择 $s > t$, 考虑

$$\begin{aligned}E[M_s|\mathcal{F}_t] &= E[B_s^2 - s|\mathcal{F}_t] \\ &= E[(B_s - B_t)^2 + 2B_t B_s - B_t^2|\mathcal{F}_t] - s \\ &= s - t + 2B_t^2 - B_t^2 - s = B_t^2 - t = M_t.\end{aligned}$$

3.6. 为了证明 $N_t := B_t^3 - 3tB_t$ 是一个鞅, 选择 $s > t$, 考虑

$$\begin{aligned}E[N_s|\mathcal{F}_t] &= E[(B_s - B_t)^3 + 3B_s^2 B_t - 3B_s B_t^2 + B_t^3|\mathcal{F}_t] - 3sB_t \\ &= 3B_t E[B_s^2|\mathcal{F}_t] - 3B_t^2 B_t + B_t^3 - 3sB_t \\ &= 3B_t E[(B_s - B_t)^2 + 2B_s B_t - B_t^2|\mathcal{F}_t] - 2B_t^3 - 3sB_t \\ &= 3B_t(s - t) + B_t^3 - 3sB_t = B_t^3 - 3tB_t = N_t.\end{aligned}$$

3.8. a) 如果 $M_t = E[Y|\mathcal{F}_t]$, 那么对 $s > t$,

$$E[M_s|\mathcal{F}_t] = E[E[Y|\mathcal{F}_s]|\mathcal{F}_t] = E[Y|\mathcal{F}_t] = M_t.$$

3.9. 如果 $B_0=0$, $\int_0^T B_t\circ dB_t=\frac{1}{2}B_T^2$.

3.12 (i) a) $dX_t=\left(\gamma+\frac{1}{2}\alpha^2\right)X_tdt+\alpha X_tdB_t$.

b) $dX_t=\frac{1}{2}\sin X_t[\cos X_t-t^2]dt+(t^2+\cos X_t)dB_t$.

(ii) a) $dX_t=\left(r-\frac{1}{2}\alpha^2\right)X_tdt+\alpha X_t\circ dB_t$.

b) $dX_t=(2e^{-X_t}-X_t^3)dt+X_t^2\circ dB_t$.

3.15. 假定

$$C+\int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega)=D+\int_S^T g(t,\omega)dB_t(\omega).$$

取期望可得

$$C=D,$$

因此

$$\int_S^T f(t,\omega)dB_t(\omega)=\int_S^T g(t,\omega)dB_t(\omega).$$

由 Itô 等距得

$$0=E\left[\left(\int_S^T(f(t,\omega)-g(t,\omega))dB(t)\right)^2\right]=E\left[\int_S^T(f(t,\omega)-g(t,\omega))^2dt\right],$$

由此得出

$$f(t,\omega)=g(t,\omega)\quad 对\ \text{a.a.}\ (t,\omega)\in[S,T]\times\Omega.$$

4.1. a) $dY_t=2B_tdB_t+dt$.

b) $dY_t=\left(1+\frac{1}{2}e^{B_t}\right)dt+e^{B_t}dB_t$.

c) $dY_t=2dt+2B_1dB_1(t)+2B_2dB_2(t)$.

d) $dY_t=\begin{pmatrix}dt\\ dB_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}dt+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}dB_t$.

e) $dY_1(t)=dB_1(t)+dB_2(t)+dB_3(t)$,

$dY_2(t)=dt-B_3(t)dB_1(t)+2B_2(t)dB_2(t)-B_1(t)dB_3(t)$.

或

$$dY_t=\begin{pmatrix}dY_1(t)\\ dY_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}dt+\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -B_3(t) & 2B_2 & -B_1(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dB_1(t)\\ dB_2(t)\\ dB_3(t)\end{pmatrix}.$$

4.2. 由 Itô 公式得

$$d\left(\frac{1}{3}B_t^3\right)=B_t^2dB_t+B_tdt,$$

因此

$$\frac{1}{3}B_t^3 = \int_0^t B_s^2 dB_s + \int_0^t B_s ds.$$

4.3. 应用 Itô 公式于 $g(x,y) = x \cdot y$ 得

$$\begin{aligned} d(X_tY_t) &= d(g(X_t, Y_t)) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x}(X_t, Y_t)dX_t + \frac{\partial g}{\partial y}(X_t, Y_t)dY_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(X_t, Y_t) \cdot (dX_t)^2 \\ &\quad + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(X_t, Y_t)dX_t dY_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(X_t, Y_t) \cdot (dY_t)^2 \\ &= Y_t dX_t + X_t dY_t + dX_t dY_t, \end{aligned}$$

由此可得

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t dX_s dY_s.$$

4.5. 如果 $B_0 = 0$, $E[B_t^6] = 15t^3$.

4.11. b) 由 Itô 公式得

$$\begin{aligned} d(e^{\frac{1}{2}t}\sin B_t) &= \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}\sin B_t dt + e^{\frac{1}{2}t}\cos B_t dB_t + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}(-\sin B_t)dt \\ &= e^{\frac{1}{2}t}\cos B_t dB_t. \end{aligned}$$

因为

$$f(t) := e^{\frac{1}{2}t}\cos B_t \in \mathcal{V}(0,T), \quad \forall\, T,$$

得到 $X_t = e^{\frac{1}{2}t}\sin B_t$ 是一个鞅.

c) 由 Itô 公式 (或练习 4.3) 可得

$$\begin{aligned} d\left((B_t + t)\exp\left(-B_t - \frac{1}{2}t\right)\right) &= (B_t + t)\exp\left(-B_t - \frac{1}{2}t\right)(-1)dB_t \\ &\quad + \exp\left(-B_t - \frac{1}{2}t\right)(dB_t + dt) + \exp\left(-B_t - \frac{1}{2}t\right)(-1)dt \\ &= \exp\left(-B_t - \frac{1}{2}t\right)(1 - t - B_t)dB_t, \end{aligned}$$

这里利用了

$$d\left(\exp\left(-B_t - \frac{1}{2}t\right)\right) = -\exp\left(-B_t - \frac{1}{2}t\right)dB_t,$$

由于

$$f(t) := \exp\left(-B_t - \frac{1}{2}t\right)(1 - t - B_t) \in \mathcal{V}(0,T), \quad \forall\, T > 0,$$

得出 $X_t = (B_t + t)\exp\left(-B_t - \frac{1}{2}t\right)$ 是一个鞅.

4.14. a) $B_T(\omega) = \int_0^T 1 \cdot dB_t$.

b) 由分部积分得

$$\int_0^T B_t dt = TB_T - \int_0^T t dB_t = \int_0^T (T-t) dB_t.$$

c) 由 Itô 公式, 有 $d(B_t^2) = 2B_t dB_t + dt$. 这样得出

$$B_T^2 = T + \int_0^T 2B_t dB_t.$$

d) 由 Itô 公式有

$$d(B_t^3) = 3B_t^2 dB_t + 3B_t dt,$$

结合 4.14 b), 得到

$$B_T^3 = \int_0^T 3B_t^2 dB_t + 3\int_0^T B_t dt = \int_0^T (3B_t^2 + 3(T-t)) dB_t.$$

e) 因为 $d\left(e^{B_t - \frac{1}{2}t}\right) = e^{B_t - \frac{1}{2}t} dB_t$ 得

$$e^{B_T - \frac{1}{2}T} = 1 + \int_0^T e^{B_t - \frac{1}{2}t} dB_t$$

或

$$e^{B_T} = e^{\frac{1}{2}T} + \int_0^T e^{B_t + \frac{1}{2}(T-t)} dB_t.$$

f) 由练习 4.11 b) 有

$$d(e^{\frac{1}{2}t} \sin B_t) = e^{\frac{1}{2}t} \cos B_t dB_t$$

或

$$e^{\frac{1}{2}T} \sin B_T = \int_0^T e^{\frac{1}{2}t} \cos B_t dB_t,$$

因此

$$\sin B_T = \int_0^T e^{\frac{1}{2}(t-T)} \cos B_t dB_t.$$

5.3. 如果 $B_0 = 0$, $X_t = X_0 \cdot \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \alpha_k^2\right) t + \sum_{k=1}^n \alpha_k B_k(t)\right)$.

5.4. (i)

$$\begin{aligned} X_1(t) &= X_1(0) + t + B_1(t), \\ X_2(t) &= X_2(0) + X_1(0) B_2(t) + \int_0^t s dB_2(s) + \int_0^t B_1(s) dB_s(s), \end{aligned}$$

假定 $B(0) = 0$.

(ii) $X_t = e^t X_0 + \int_0^t e^{t-s} dB_s$.

(iii) $X_t = e^{-t} X_0 + e^{-t} B_t$(假定 $B_0 = 0$).

5.6. 由 Itô 公式得

$$dF_t = F_t\left(-\alpha dB_t + \frac{1}{2}\alpha^2 dt\right) + \frac{1}{2}F_t\alpha^2 dt = F_t(-\alpha dB_t + \alpha^2 dt).$$

因此由练习 4.3,

$$\begin{aligned} d(F_tY_t) &= F_t dY_t + Y_t dF_t + dF_t dY_t \\ &= F_t dY_t + Y_t F_t(-\alpha dB_t + \alpha^2 dt) + (-\alpha F_t dB_t)(\alpha Y_t dB_t) \\ &= F_t(dY_t - \alpha Y_t dB_t) = F_t r dt. \end{aligned}$$

积分得

$$F_tY_t = F_0Y_0 + \int_0^t rF_s ds$$

或

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_0F_t^{-1} + F_t^{-1}\int_0^t rF_s ds \\ &= Y_0 \exp\left(\alpha B_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t\right) + r\int_0^t \exp(\alpha(B_t - B_s) - \frac{1}{2}\alpha^2(t-s))ds. \end{aligned}$$

5.7. a) $X_t = m + (X_0 - m)e^{-t} + \sigma\int_0^t e^{s-t}dB_s$.

b) $E[X_t] = m + (X_0 - m)e^{-t}$, $Var[X_t] = \frac{\sigma^2}{2}[1 - e^{-2t}]$.

5.8. $X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \exp(tJ)X(0) + \exp(tJ)\int_0^t \exp(-sJ)MdB(s)$, 这里

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad dB(s) = \begin{pmatrix} dB_1(s) \\ dB_2(s) \end{pmatrix},$$

$$\exp(tJ) = I + tJ + \frac{t^2}{2}J^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}J^n + \cdots \in \mathbf{R}^{2\times 2}.$$

利用 $J^2 = -I$ 得

$$\begin{aligned} X_1(t) &= X_1(0)\cos(t) + X_2(0)\sin(t) + \int_0^t \alpha\cos(t-s)dB_1(s) + \int_0^t \beta\sin(t-s)dB_2(s), \\ X_2(t) &= -X_1(0)\sin(t) + X_2(0)\cos(t) - \int_0^t \alpha\sin(t-s)dB_1(s) + \int_0^t \beta\cos(t-s)dB_2(s). \end{aligned}$$

5.11. 提示: 为了证明 $\lim_{t\to 1}(1-t)\int_0^t \frac{dB_s}{1-s} = 0$, a.s., 记 $M_t = \int_0^t \frac{dB_s}{1-s}$, 对 $0 \leqslant t < 1$. 应用鞅不等式证明

$$P[\sup\{(1-t)|M_t|;\ t \in [1-2^{-n}, 1-2^{-n-1}]\} > \varepsilon] \leqslant 2\varepsilon^{-2}\cdot 2^{-n},$$

故由 Borel-Cantelli 引理知, 对几乎所有的 ω, 存在 $n(\omega) < \infty$, 使得

$$n \geqslant n(\omega) \Rightarrow \omega \notin A_n,$$

这里

$$A_n = \{\omega;\ \sup\{(1-t)|M_t|;\ t \in [1-2^{-n}, 1-2^{-n-1}]\} > 2^{-\frac{n}{4}}\}.$$

5.12. a) 如果引入

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = y'(t), \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

那么方程

$$y''(t) + (1 + \varepsilon W_t)y(t) = 0$$

可写成

$$X'(t) := \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ -(1+\varepsilon W_t)x_1(t) \end{pmatrix}.$$

它可看成随机微分方程

$$\begin{aligned} dX(t) &= \begin{pmatrix} x_2(t)dt \\ -x_1(t)dt - \varepsilon x_1(t)dB_t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} dt - \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} dB_t \\ &= KX(t)dt - \varepsilon LX(t)dB_t, \end{aligned}$$

其中

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) 由上可得

$$y'(t) = y'(0) + \int_0^t y''(s)ds = y'(0) - \int_0^t y(s)ds - \varepsilon \int_0^t y(s)dB_s.$$

应用随机 Fubini 定理得

$$\begin{aligned} y(t) &= y(0) + \int_0^t y'(s)ds \\ &= y(0) + y'(0)t - \int_0^t \left(\int_0^s y(r)dr\right) ds - \varepsilon \int_0^t \left(\int_0^s y(r)dB_r\right) ds \\ &= y(0) + y'(0)t - \int_0^t \left(\int_r^t y(r)ds\right) dr - \varepsilon \int_0^t \left(\int_r^t y(r)ds\right) dB_r \\ &= y(0) + y'(0)t + \int_0^t (r-t)y(r)dr + \varepsilon \int_0^t (r-t)y(r)dB_r. \end{aligned}$$

5.16. c) $X_t = \exp\left(\alpha B_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t\right)\left[x^2 + 2\int_0^t \exp(-2\alpha B_s + \alpha^2 s)ds\right]^{1/2}$.

6.15. a) $X_t = X_0 \exp\left(\sigma dB_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right) = x\exp\left(\xi_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$.

因此

$$\mathcal{M}_t \subseteq \mathcal{N}_t.$$

另一方面, 因为

$$\xi_t = \frac{1}{2}\sigma^2 t + \ln\frac{X_t}{x},$$

可得 $\mathcal{N}_t \subseteq \mathcal{M}_t$. 因此 $\mathcal{M}_t = \mathcal{N}_t$.

b) 考虑滤波问题

$$\text{(系统)}\ \ d\mu = 0,\ \bar{\mu} = E[\mu],\quad a^2 = E[(\mu - \bar{\mu})^2] = \theta^{-1},$$
$$\text{(观测)}\ \ d\xi_t = \mu dt + \sigma dB_t;\quad \xi_0 = 0,$$

由例 6.2.9, 它的解为

$$\hat{\mu} = E[\mu|\mathcal{N}_t] = \frac{\sigma^2\bar{\mu}}{\sigma^2 + a^2 t} + \frac{a^2}{\sigma^2 + a^2 t}\xi_t = (\theta + \sigma^{-2}t)^{-1}(\bar{\mu}\theta + \sigma^{-2}\xi_t).$$

c) 在 b) 中滤波问题的更新过程 N_t 是

$$N_t = \xi_t - \int_0^t \hat{\mu}(s)ds.$$

因此, 由 a) 知

$$\tilde{B}_t = \int_0^t \sigma^{-1}(\mu - E[\mu|\mathcal{M}_s])ds + B_t = \int_0^t \sigma^{-1}(\mu - E[\mu|\mathcal{N}_s])ds + B_t = \sigma^{-1}N_t,$$

由引理 6.2.6 知它为布朗运动.

d) 因为 $\tilde{B}_t = \sigma^{-1}\left(\xi_t - \int_0^t \hat{\mu}(s)ds\right)$, 知 $\tilde{B}_t$ 是 $\mathcal{N}_t$ 可测的, 由 a) 知也是 $\mathcal{M}_t$ 可测的.

e) $\sigma d\tilde{B}_t = d\xi_t - \hat{\mu}(t)dt = d\xi_t - \frac{\bar{\mu}\theta + \sigma^{-2}\xi_t}{\theta + \sigma^{-2}t}dt$.

因此

$$d\xi_t - \frac{1}{\sigma^2\theta + t}\xi_t dt = \frac{\bar{\mu}\theta}{\theta + \sigma^{-2}t}dt + \sigma d\tilde{B}_t,$$

得到

$$d\left(\xi_t \exp\left(-\int_0^t \frac{ds}{\sigma^2\theta + s}\right)\right) = \exp\left(-\int_0^t \frac{ds}{\sigma^2\theta + s}\right)\left[\frac{\bar{\mu}\theta}{\theta + \sigma^{-2}t}dt + \sigma d\tilde{B}_t\right]$$

或

$$d\left(\frac{\xi_t}{\sigma^2\theta + t}\right) = \frac{1}{\sigma^2\theta + t}\left[\frac{\bar{\mu}\theta}{\theta + \sigma^{-2}t}dt + \sigma d\tilde{B}_t\right].$$

于是

$$\xi_t = \bar{\mu} - \frac{\bar{\mu}\sigma^2\theta}{\sigma^2\theta + t} + \sigma\int_0^t \frac{d\tilde{B}_s}{\sigma^2\theta + s}.$$

由此表明 ξ_t 是 $\tilde{\mathcal{F}}_t$ 可测的.

f) 结合 (6.3.20), (6.3.24) 和 a) 得

$$dX_t = X_t(\mu dt + \sigma dB_t) = X_t d\xi_t = X_t(\hat{\mu}(t)dt + \sigma d\tilde{B}_t) = E[\mu|\mathcal{M}_t]X_t dt + \sigma X_t d\tilde{B}_t.$$

7.1. a) $Af(x) = \mu x f'(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(x);\quad f \in C_0^2(\mathbf{R})$.

b) $Af(x) = rxf'(x) + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 f''(x);\quad f \in C_0^2(\mathbf{R})$.

c) $Af(y) = rf'(y) + \frac{1}{2}\alpha^2 y^2 f''(y);\quad f \in C_0^2(\mathbf{R})$.

d) $Af(t,x) = \dfrac{\partial f}{\partial t} + \mu x \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2};\ f \in C_0^2(\mathbf{R}^2)$.

e) $Af(x_1,x_2) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \dfrac{1}{2}e^{2x_1}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2};\ f \in C_0^2(\mathbf{R}^2)$.

f) $Af(x_1,x_2) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dfrac{1}{2}x_1^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2};\ f \in C_0^2(\mathbf{R}^2)$.

g) $Af(x_1,\cdots,x_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^n r_k x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n x_i x_j \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{ik}\alpha_{jk}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j};f \in C_0^2(\mathbf{R}^n)$.

7.2. a) $dX_t = dt + \sqrt{2}dB_t$.

b) $dX(t) = \begin{pmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ cX_2(t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha X_2(t) \end{pmatrix} dB_t$.

c) $dX(t) = \begin{pmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2X_2(t) \\ \ln(1 + X_1^2(t) + X_2^2(t)) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} X_1(t) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dB_1(t) \\ dB_2(t) \end{pmatrix}$.

7.4. a), b). 设 $\tau_k = \inf\{t > 0;\ B_t^x = 0\text{或}B_t^x = k\};\ k > x > 0$, 记

$$p_k = P^x[B_{\tau_k} = k],$$

那么把 Dynkin 公式应用到 $f(y) = y^2,\ 0 \leqslant y \leqslant k$ 得

$$E^x[\tau_k] = k^2 p_k - x^2;$$

另一方面, 把 Dynkin 公式应用到 $f(y) = y,\ \ 0 \leqslant y \leqslant k$ 得

$$kp_k = x.$$

结合上面两个等式得到

$$E^x[\tau] = \lim_{k\to\infty} E^x[\tau_k] = \lim_{k\to\infty} x(k - x) = \infty,$$

而且有

$$P^x[\exists\ t < \infty, B_t = 0] = \lim_{k\to\infty} P^x[B_{\tau_k} = 0] = \lim_{k\to\infty}(1 - p_k) = 1.$$

因此 $\tau < \infty$ a.s. P^x.

7.15. 由 Markov 性 (7.2.5) 有

$$E^x[\mathcal{X}_{[K,\infty)}(B_T)|\mathcal{F}_t]=E^x[\theta_t\mathcal{X}_{[K,\infty)}(B_{T-t})|\mathcal{F}_t]=E^{B_t}[\mathcal{X}_{[K,\infty)}(B_{T-t})]=E^y[f(B_{T-t})]_{y=B_t}$$
$$=\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{\mathbf{R}}f(z)e^{-\frac{(z-y)^2}{2(T-t)}}dz\right]_{y=B_t}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_K^\infty e^{-\frac{(z-B_t)^2}{2(T-t)}}dz,$$

这里

$$f(x)=\mathcal{X}_{[K,\infty)}(x).$$

7.18. a) 定义

$$w(x)=\frac{f(x)-f(a)}{f(b)-f(a)},\quad x\in[a,b],$$

那么

$$Lw(x)=0,\quad 在\ D:=(a,b)\ 中$$

且

$$w(a)=0,\quad w(b)=1.$$

由 Dynkin 公式得

$$1\cdot P^x[X_\tau=b]+0\cdot P^x[X_\tau=a]=w(x)+E^x\left[\int_0^\tau Lw(X_t)dt\right]=w(x),$$

即

$$w=P^x[X_\tau=b]=\frac{f(x)-f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

c) $p=\left[\exp\left(-\frac{2\mu b}{\sigma^2}\right)-\exp\left(-\frac{2\mu a}{\sigma^2}\right)\right]^{-1}\left(\exp\left(-\frac{2\mu x}{\sigma^2}\right)-\exp\left(-\frac{2\mu a}{\sigma^2}\right)\right).$

8.1. a) $g(t,x)=E^x[\phi(B_t)]$.

b) $u(x)=E^x\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}\psi(B_t)dt\right]$.

8.11. 对 $T>0$, 定义 $\mathcal{F}_T$ 上的测度 Q_T:

$$dQ_T(\omega)=\exp\left(-B(T)-\frac{1}{2}T\right)dP(\omega),$$

然后由 Girannov 定理 $Y(t):=t+B(t);\ 0\leqslant t\leqslant T$ 相对于 Q_T 为布朗运动. 因为

$$Q_T=Q_s,\quad 在\ \mathcal{F}_t\ 上,\quad \forall\, t\leqslant\min(S,T)$$

存在 $\mathcal{F}_\infty$ 上的测度 Q 使得 (Folland, 1984 定理 1.14)

$$Q=Q_T,\quad 在\ \mathcal{F}_T\ 上,\quad \forall\, T<\infty.$$

由重对数律 (定理 5.1.2) 知

$$P[N]=1,$$

这里

$$N = \left\{\omega;\ \lim_{t\to\infty} Y(t) = \infty\right\};$$

另一方面, 因为 $Y(t)$ 相对于 Q 是布朗运动, 有

$$Q[N] = 0,$$

因此 P 相对于 Q 不是绝对连续的.

8.12. 方程

$$\sigma(t,\omega)u(t,\omega) = \beta(t,\omega)$$

有形式

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

有解

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此在 $\mathcal{F}_T^{(2)}$ 上定义测度 Q:

$$dQ(\omega) = \exp(3B_1(T,\omega) - B_2(T,\omega) - 5T)dP(\omega).$$

9.1. a) $dX_t = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} dB_t.$

b) $dX_t = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dB_t.$

c) $dX_t = \alpha X_t dt + \beta dB_t.$

d) $dX_t = \alpha dt + \beta X_t dB_t.$

e) $dX_t = \begin{pmatrix} dX_1(t) \\ dX_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(1+X_1^2(t)) \\ X_2(t) \end{pmatrix} dt + \sqrt{2}\begin{pmatrix} X_2(t) & 0 \\ X_1(t) & X_1(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dB_1(t) \\ dB_2(t) \end{pmatrix}.$

9.2. (i) 此时设

$$dX_t = \begin{pmatrix} dt \\ dB_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dB_t;\quad X_0 = \begin{pmatrix} s \\ x \end{pmatrix},$$

$$D = \{(s,x) \in \mathbf{R}^2;\ s < T\}.$$

那么

$$\tau_D = \inf\{t > 0;\ (s+t, B_t) \notin D\} = T - s,$$

得到

$$\begin{aligned} u(s,x) &= E^{s,x}\left[\psi(B_{\tau_D}) + \int_0^{\tau_D} g(X_t)dt\right] \\ &= E\left[\psi(B_{T-s}^x) - \int_0^{T-s} \phi(s+t, B_t^x)dt\right], \end{aligned}$$

这里 B_t^x 是初值为 x 的布朗运动.

(ii) 定义 X_t:

$$dX_t = \alpha X_t dt + \beta X_t dB_t, \quad X_0 = x > 0,$$

记

$$D = (0, x_0),$$

如果 $\alpha \geqslant \frac{1}{2}\beta^2$, 那么 $\tau_D = \inf\{t > 0; X_t \notin D\} < \infty$ a.s., 且

$$X_{\tau_D} = x_0 \text{ a.s. (见例 5.1.1)},$$

因此唯一的有界解是

$$u(x) = E^x[(X_{\tau_D})^2] = x_0^2 \text{ (常数)}.$$

(iii) 尝试用如下形式的解:

$$u(x) = x^\gamma \quad (\gamma\text{为某常数})$$

得到

$$\alpha x u'(x) + \frac{1}{2}\beta^2 x^2 u''(x) = \left(\alpha + \frac{1}{2}\beta^2(\gamma - 1)\right) x^\gamma,$$

因此当且仅当

$$\gamma = 1 - \frac{2\alpha}{\beta^2}$$

时 $u(x)$ 为解. 此时方程

$$\alpha x u'(x) + \frac{1}{2}\beta^2 x^2 u''(x) = 0$$

的通解为

$$u(x) = C_1 + C_2 x^\gamma,$$

这里 C_1, C_2 为任意的常数. 如果 $\alpha < \frac{1}{2}\beta^2$, 那么所有的解都在 $(0, x_0)$ 上有界. 需在 $x = 0$ 处附加一个边界条件才能得到唯一解. 此时 $P[\tau_D = \infty] > 0$. 如果 $\alpha > \frac{1}{2}\beta^2$, 那么 $u(x) = C_1$ 是 $(0, x_0)$ 上的唯一的有界解, 与定理 9.1.1(及上面的 (ii)) 一致.

9.3. a) $u(t, x) = E^x[\phi(B_{T-t})]$.

b) $u(t, x) = E^x[\psi(B_t)]$.

9.8. a) 设 $X_t \in \mathbf{R}^2$ 是如例 9.2.1 描述的向右的匀速运动. 那么每个单点集 $\{(x_1, x_2)\}$ 是薄集 (因此是半极集), 但不是极集.

b) X_t 如 a), 设 $H_k = \{(a_k, 1)\}; k = 1, 2, \cdots$, 这里 $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ 是有理数集. 那么每个 H_k 都是薄集, 但

$$Q^{(x_1, 1)}[T_H = 0] = 1, \quad \forall\, x_1 \in \mathbf{R}.$$

9.10. 设 $Y_t = Y_t^{s,x} = (s + t, X_t^x)$, $t \geqslant 0$, $X_t = X_t^x$ 满足

$$dX_t = \alpha X_t dt + \beta X_t dB_t, \quad t \geqslant 0, X_0 = x > 0,$$

那么 Y_t 的生成元 $\hat{A}$ 为

$$\hat{A}f(s,x)=\frac{\partial f}{\partial s}+\alpha x\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}\beta^2x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad f\in C_0^2(\mathbf{R}^2),$$

而且, 由 $D=\{(t,x);x>0,t<T\}$ 得

$$\tau_D:=\inf\{t>0;Y_t\notin D\}=\inf\{t>0;s+t>T\}=T-s,$$

因此

$$Y_{\tau_D}=(T,X_{T-s}).$$

由定理 9.3.3, 解为

$$f(s,x)=E\left[e^{-\rho T}\phi(X_{T-s}^x)+\int_0^{T-s}e^{-\rho(s+t)}K(X_t^x)dt\right].$$

9.15. a) 记 $w(s,x)=e^{-\rho s}h(x)$, 有

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial s}=e^{-\rho s}\left(\frac{1}{2}h''(x)-\rho h(x)\right),$$

边界值问题归约为

(1) $\frac{1}{2}h''(x)-\rho h(x)=-\theta x^2;\ a<x<b;$

(2) $h(a)=\psi(a),\ h(b)=\psi(b).$

(1) 的通解为

$$h(x)=C_1e^{\sqrt{2\rho}x}+C_2e^{-\sqrt{2\rho}x}+\frac{\theta}{\rho}x^2-\frac{\theta}{\rho^2},$$

这里 C_1, C_2 为任意的常数. 边界条件 (2) 唯一地确定 C_1,C_2.

b) 为了求 $g(x,\rho)=g(x):=E^x[e^{-\rho\tau_D}]$ 应用上面的结果, 其中 $\psi=1,\theta=0$ 得到

$$g(x)=C_1e^{\sqrt{2\rho}x}+C_2e^{-\sqrt{2\rho}x},$$

这里常数 C_1, C_2 由以下确定:

$$g(a)=1,\quad g(b)=1,$$

通过化简计算得

$$g(x)=\frac{\sinh(\sqrt{2\rho}(b-x))+\sinh(\sqrt{2\rho}(x-a))}{\sinh(\sqrt{2\rho}(b-a))},\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

10.1. a) $g^*(x)=\infty$, τ^* 不存在.

b) $g^*(x)=\infty$, τ^* 不存在.

c) $g^*(x)=1$, $\tau^*=\inf\{t>0;B_t=0\}$.

d) 如果 $\rho<\frac{1}{2}$, 那么 $g^*(s,x)=\infty$, τ^* 不存在.

如果 $\rho\geqslant\frac{1}{2}$, 那么 $g^*(s,x)=g(s,x)=e^{-\rho s}\cosh x$, $\tau^*=0$.

10.2. a) 设 W 是一个闭圆, 圆心为 y, 半径 $\rho < |x-y|$. 定义

$$\tau_\rho = \inf\{t > 0;\ B_t^x \in W\}.$$

在 $\mathbf{R}^2$ 中, $\tau_\rho < \infty$ a.s. (见例 7.4.2). 假定存在一个非负的上调和函数 u, 使得

(1) $u(x) < u(y)$. 那么

(2) $u(x) \geqslant E^x[u(B_{\tau_\rho})]$.

由于 u 是下半连续的, 存在 $\rho > 0$ 使得

(3) $\inf\{u(z);\ z \in W\} > u(x)$. 结合 (2) 得出矛盾

$$u(x) \geqslant E^x[u(B_{\tau_\rho})] > u(x).$$

b) 上面 a) 中的论证在 $\mathbf{R}$ 中也成立. 因此

$$g^*(x) = \sup\{g(x);\ x \in \mathbf{R}\} = \sup\{xe^{-x};\ x > 0\} = \frac{1}{e}.$$

c) 对 $x \neq 0$, 有

$$\begin{aligned}\Delta(|x|^\gamma) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{\gamma/2}\right)\\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\gamma}{2}\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{\frac{\gamma}{2}-1} 2x_i\right)\\ &= \gamma(\gamma+n-2)|x|^{\gamma-2},\end{aligned}$$

因此 $|x|^\gamma$ 及 $f_\gamma(x) = \min(1, |x|^\gamma)$ 为上调和的充要条件是 $\gamma(\gamma+n-2) \leqslant 0$, 即

$$2-n \leqslant \gamma \leqslant 0.$$

10.3. $x_0 > 0$, 由下面的方程隐式地给出

$$x_0 = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \frac{e^{2\sqrt{2\rho}x_0}+1}{e^{2\sqrt{2\rho}x_0}-1},$$

$g^*(s,x) = e^{-\rho s}x_0^2 \dfrac{\cosh(\sqrt{2\rho}x)}{\cosh(\sqrt{2\rho}x_0)}$, $-x_0 \leqslant x \leqslant x_0$, 这里 $\cosh\xi = \dfrac{1}{2}(e^\xi + e^{-\xi})$.

10.9 如果 $0 < \rho \leqslant 1$, 那么 $\Phi(x) = \dfrac{1}{\rho}x^2 + \dfrac{1}{\rho^2}$, 但 τ^* 不存在. 如果 $\rho > 1$ 那么

$$\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}x^2 + \dfrac{1}{\rho^2} + C\cosh(\sqrt{2\rho}x), & |x| \leqslant x^*,\\ x^2, & |x| > x^*,\end{cases}$$

这里 $C > 0$, $x^* > 0$ 是下面方程的唯一解:

$$C\cosh(\sqrt{2\rho}x^*) = \left(1-\frac{1}{\rho}\right)(x^*)^2 - \frac{1}{\rho^2},$$

$$C\sqrt{2\rho}\sinh(\sqrt{2\rho}x^*) = 2\left(1-\frac{1}{\rho}\right)x^*.$$

10.12. 如果 $\rho > r$, 那么 $g^*(s,x) = e^{-\rho s}(x_0 - 1)^+ \left(\frac{x}{x_0}\right)^\gamma$ 且 $\tau^* = \inf\{t > 0;\ X_t \geqslant x_0\}$, 这里

$$\gamma = \alpha^{-2}\left[\frac{1}{2}\alpha^2 - r + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\alpha^2 - r\right)^2 + 2\alpha^2\rho}\right],$$
$$x_0 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \quad (\gamma > 1 \Leftrightarrow \rho > r).$$

10.13. 如果 $\alpha \leqslant \rho$, 那么 $\tau^* = 0$.

如果 $\rho < \alpha < \rho + \lambda$, 那么

$$G^*(s,p,q) = \begin{cases} e^{-\rho s}pq, & 0 < pq < y_0, \\ e^{-\rho s}(C_1(pq)^{\gamma_1} + \dfrac{\lambda}{\rho + \lambda - \alpha}\cdot pq - \dfrac{K}{\rho}, & pq \geqslant y_0, \end{cases}$$

这里

$$\gamma_1 = \beta^{-2}\left[\frac{1}{2}\beta^2 + \lambda - \alpha - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\beta^2 + \lambda - \alpha\right)^2 + 2\rho\beta^2}\right] < 0,$$
$$y_0 = \frac{(-\gamma_1)K(\rho + \lambda - \alpha)}{(1 - \gamma_1)\rho(\alpha - \rho)} > 0,$$
$$C_1 = \frac{(\alpha - \rho)y_0^{1-\gamma_1}}{(-\gamma_1)(\rho + \lambda - \alpha)}.$$

连续域为

$$D = \{(s,p,q); pq > y_0\}.$$

如果 $\rho + \lambda \leqslant \alpha$, 那么 $G^* = \infty$.

10.14. 首先假定

情形 1. $\rho > \alpha$.

注意有

$$\int_\tau^\infty e^{-\rho(s+t)}P_t dt = e^{-\rho s}\left[\int_0^\infty e^{-\rho t}P_t dt - \int_0^\tau e^{-\rho t}P_t dt\right],$$

而

$$E\left[\int_0^\infty e^{-\rho t}P_t dt\right] = \int_0^\infty e^{-\rho t}E\left[p\exp\left(\beta B_t + \left(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2\right)t\right)\right]dt$$
$$= \int_0^\infty pe^{(\alpha-\rho)t}dt = \frac{p}{\rho - \alpha},$$

因此

$$\Phi(s,p) = \frac{pe^{-\rho s}}{\rho - \alpha} + \Psi(s,p),$$

这里

$$\Psi(s,p) = \sup_\tau E^{(s,p)}\left[\int_0^\tau (-e^{-\rho(s+t)}P_t)dt - Ce^{-\rho(s+\tau)}\right],$$

这是形如 10.4 节讨论的问题, 其中

$$Y(t)=\begin{pmatrix} s+t \\ P_t \end{pmatrix},\quad Y(0)=\begin{pmatrix} s \\ p \end{pmatrix}=y\in\mathbf{R}^2,$$

$$f(y)=f(s,x)=-e^{-\rho s}p,\quad g(s,x)=-Ce^{-\rho s},$$

为了得到连续域 D. 考虑集合

$$U=\{y;\ Lg(y)+f(y)>0\}\quad (\text{见}(10.3.7)),$$

这里生成元 L 为

$$L\phi(s,p)=\frac{\partial\phi}{\partial s}+\alpha p\frac{\partial\phi}{\partial p}+\frac{1}{2}\beta^2p^2\frac{\partial^2\phi}{\partial p^2},$$

因此

$$U=\{(s,p);\ (-\rho)(-C)-p>0\}=\{(s,p);\ p<\rho C\}.$$

依此, 试用连续域的形式为

$$D=\{(s,p);\ 0<p<p^*\}.$$

某个 $p^*>0$(待定).

试用值函数的形式为

$$\phi(s,p)=e^{-\rho s}\psi(p),$$

这里由定理 10.4.1, 函数 ψ 要求满足下列条件:

(1) $L_0\psi(p):=-\rho\psi(p)+\alpha p\psi'(p)+\frac{1}{2}\beta^2p^2\psi''(p)-p=0;\ 0<p<p^*$;

(2) $L_0\psi(p)\leqslant 0;\ \ p>p^*$;

(3) $\psi(p)=-C;\ \ p>p^*$;

(4) $\psi(p)>-C;\ \ 0<p<p^*$.

(1) 的通解为

$$\psi(p)=K_1p^{\gamma_1}+K_2p^{\gamma_2}+\frac{p}{\alpha-\rho},$$

其中

(5) $\gamma_i=\beta^{-2}\left[\frac{1}{2}\beta^2-\alpha\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\beta^2-\alpha\right)^2+2\rho\beta^2}\right],\quad i=1,2,$

此处

$$\gamma_2<0<\gamma_1,$$

且 K_1, K_2 为任意的常数.

由于 $\psi(p)$ 在 $p=0$ 附近必为有界, 故一定有 $K_2=0$. 因此

(6) $\psi(p)=\begin{cases} K_1p^{\gamma_1}+\dfrac{p}{\alpha-\rho}, & 0\leqslant p<p^*, \\ -C, & p\geqslant p^*. \end{cases}$

如果要求 $\psi(p)$ 在 $p=p^*$ 处连续, 则得到方程

(7) $K_1(p^*)^{\gamma_1} + \dfrac{p^*}{\alpha - \rho} = -C.$

如果 $\psi(p)$ 在 $p = p^*$ 也是 C^1 函数, 得到

(8) $K_1(p^*)^{\gamma_1 - 1} + \dfrac{1}{\alpha - \rho} = 0.$

结合起来解得

(9) $x^* = \dfrac{C(\rho - \alpha)\gamma_1}{\gamma_1 - 1};$

(10) $K_1 = \dfrac{(p^*)^{1-\gamma_1}}{\gamma_1(\rho - \alpha)}.$

不难看出

$$\gamma_1 > 1 \Leftrightarrow \rho > \alpha.$$

因为假定了 $\rho > \alpha$, 由 (9) 得 $p^* > 0$, 由 (10) 知 $K_1 > 0$.

余下要证明在上面求出的 p^*, K_1 下, 函数

$$\phi(s,p) = e^{-\rho s}\psi(p),$$

其中 ψ 由 (6) 给出, 满足定理 10.4.1 的所有的条件. 其中许多条件的验证是直接的. 然而为避免错误解, 检查 (ii) 与 (iv) 是很重要的, 它对应于上面的 (4) 与 (2).

(4) 的验证. 定义 $h(p) = \psi(p) + c$. 那么由 (7), (8) 得

$$h(P^*) = h'(p^*) = 0,$$

而且, 如果 $0 < p < p^*$ 那么

$$h''(p) = K_1\gamma_1(\gamma_1 - 1)p^{\gamma_1 - 2} > 0,$$

它隐含着 $h'(p) < 0$, 因此对 $0 < p < p^*$, $h(p) > 0$, 如所要证.

(2) 的验证. 对 $p > p^*$, 有 $\psi(p) = -C$, 因此

$$L_0\psi(p) = (-\rho)(-C) - p = \rho C - p,$$

因此

$$L_0\psi(p) \leqslant 0, \quad \forall\, p > p^*$$

当且仅当

$$p^* \geqslant \rho C,$$

而因为 $U = \{(s,p); p < \rho C\}$, 且 $U \subset D$, 故上式成立.

剩余情况:

情形 2. $\rho = \alpha$.

情形 3. $\rho < \alpha$.

都留给读者.

11.6. $u^* = \dfrac{a_1 - a_2 + \sigma_2^2(1-\gamma)}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(1-\gamma)}$ (常数),

$$\Phi(s,x) = e^{\lambda(t-t_1)}x^\gamma, \quad t < t_1,\ x > 0,$$

这里

$$\lambda = \frac{1}{2}\gamma(1-\gamma)[\sigma_1^2(u^*)^2 + \sigma_2^2(1-u^*)^2] - \gamma[a_1u^* + a_2(1-u^*)].$$

11.7. 定义

$$dY(t) = \begin{pmatrix} dt \\ dX_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha u(t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ u(t) \end{pmatrix} dB_t, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} s \\ x \end{pmatrix}.$$

$$G = \{(s,x); x > 0 \text{ 且 } s < T\},$$

那么

$$\Phi(s,x) = \Phi(y) = \sup_{u(\cdot)} E^y[g(Y_{\tau_G})],$$

这里

$$g(y) = g(s,x) = x^\gamma,$$

$$\tau_G = \inf\{t > 0; Y(t) \notin G\} = \hat{\tau}.$$

应用定理 11.2.2, 找一个函数 ϕ 使得

(1) $\sup_{v\in\mathbf{R}}\{f^v(y) + (L^v\phi)(y)\} = 0,\ \forall\, y \in G.$

此时 $f^v(y) = 0$ 且

$$L^v\phi(y) = L^v\phi(s,x) = \frac{\partial\phi}{\partial s} + av\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{1}{2}v^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}.$$

如果猜想 $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} < 0$, 那么函数: $v \to L^v\phi(s,x)$ 的最大值在

(2) $v = v^*(s,x) = -\dfrac{a\dfrac{\partial\phi}{\partial x}(s,x)}{\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(s,x)}$

处获得. 试用如下形式的函数 ϕ:

(3) $\phi(s,x) = f(s)x^\gamma$,

其中函数 f 待定. 代入 (2) 中得

(4) $v^*(s,x) = -\dfrac{af(s)\gamma x^{\gamma-1}}{f(s)\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2}} = \dfrac{ax}{1-\gamma}$,

(1) 变为

$$f'(s)x^\gamma + \frac{a^2x}{1-\gamma}f(s)\gamma x^{\gamma-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{ax}{1-\gamma}\right)^2 f(s)\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2} = 0,$$

或

(5) $f'(s) + \dfrac{a^2\gamma}{2(1-\gamma)}f(s) = 0.$

考虑终端条件:

$$\phi(y) = g(y), \quad y \in \partial G,$$

即

(6) $f(T) = 1$,

方程 (5) 有解

(7) $f(s) = \exp\left(\frac{a^2\gamma}{2(1-\gamma)}(T-s)\right), \quad s \leqslant T.$

此时容易证明

$$\phi(s,x) = f(s)x^\gamma$$

满足定理 11.2.2 的所有条件, 于是得到值函数为

$$\Phi(s,x) = \phi(s,x) = f(s)x^\gamma.$$

最优 Markov 控制为

$$u^*(s,x) = v^*(s,x) = \frac{ax}{1-\gamma}.$$

11.11. 附加提示: 对无约束问题的解, 可尝试用如下形式的函数 $\phi_\lambda(s,x)$:

$$\phi_\lambda(s,x) = a_\lambda(s)x^2 + b_\lambda(s),$$

其中 $\lambda \in \mathbf{R}$ 为固定的, $a_\lambda(s), b_\lambda(s)$ 为适当的函数. 把它代入 HJB 方程得到

$$\begin{aligned} &a'_\lambda(s) = \frac{1}{\theta}a_\lambda^2(s) - 1, \quad s < t_1,\\ &a_\lambda(t_1) = \lambda \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} &b'_\lambda(s) = -\sigma^2 a_\lambda(s), \quad s < t_1,\\ &b_\lambda(t_1) = 0. \end{aligned}$$

最优控制 $u^*(s,x) = -\frac{1}{\theta}a_\lambda(s)x$. 把它代入关于 $X_t^{u^*}$ 的方程, 利用终端条件确定 λ_0.

为简单起见设 $s=0$, 那么 $\lambda = \lambda_0$ 可选择为下面方程的任一解:

$$A\lambda^3 + B\lambda^2 + C\lambda + D = 0,$$

其中

$$\begin{aligned} A &= m^2(e^{t_1} - e^{-t_1})^2,\\ B &= m^2(e^{2t_1} + 2 - 3e^{-2t_1}) - \sigma^2(e^{t_1} - e^{-t_1})^2,\\ C &= m^2(-e^{2t_1} + 2 + 3e^{-2t_1}) - 4x^2 - 2\sigma^2(1 - e^{-2t_1}),\\ D &= -m^2(e^{t_1} + e^{-t_1})^2 + 4x^2 + \sigma^2(e^{2t_1} - e^{-2t_1}). \end{aligned}$$

11.12. 如果引进过程

$$dY(t) = \begin{pmatrix} dt \\ dX_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ u_t \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix} dB_t, \quad Y(0) = y = \begin{pmatrix} s \\ x \end{pmatrix},$$

问题可重写为

$$\Psi(s,x)=\inf_u E^y\left[\int_0^\infty f(Y(t),u(t))dt\right],$$

这里

$$f(y,u)=f^u(y)=f^u(s,x)=e^{-\rho s}(x^2+\theta u^2).$$

此时寻找函数 ψ 满足

(1) $\inf_{v\in\mathbf{R}}\left\{e^{-\rho s}(x^2+\theta v^2)+\frac{\partial\psi}{\partial s}+v\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right\}=0,\ (s,x)\in\mathbf{R}^2.$

猜想 ψ 有形式

$$\psi(s,x)=e^{-\rho s}(ax^2+b),$$

那么由 (1) 得到

(2) $\inf_{v\in\mathbf{R}}\left\{x^2+\theta v^2-\rho(ax^2+b)+v2ax+\frac{1}{2}\sigma^2 2a\right\}=0,\ x\in\mathbf{R};$

(3) $v=v^*(s,x)=-\frac{ax}{\theta}$

时取得最小值. 代入 (2) 得

$$x^2\left[1-\rho a-\frac{a^2}{\theta}\right]+\sigma^2 a-\rho b=0,\quad \forall\, x\in\mathbf{R}.$$

这唯一的可能性是

(4) $a^2+\rho\theta a-\theta=0$ 且

(5) $b=\frac{\sigma^2 a}{\rho}.$

(4) 的正根是

(6) $a=\frac{1}{2}\left[-\rho\theta+\sqrt{\rho^2\theta^2+4\theta}\right].$

可以证明当 a, b 分别为 (6) 与 (5) 时, 函数

$$\psi(s,x)=e^{-\rho s}(ax^2+b)$$

满足定理 11.2.2 的所有要求, 由此值函数为

$$\Psi(s,x)=\psi(s,x)=e^{-\rho s}(ax^2+b).$$

最优控制是

$$u^*(s,x)=v^*(s,x)=-\frac{ax}{\theta}.$$

11.13. 如果引入

$$dY(t)=\begin{pmatrix}dt\\ dX_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1-u_t\end{pmatrix}dt+\begin{pmatrix}0\\ \sigma\end{pmatrix}dB_t,\quad Y(0)=y=\begin{pmatrix}s\\ x\end{pmatrix}$$

且

$$G=\{(s,x)\in\mathbf{R}^2;\ x>0\},$$

那么问题的形式为

$$\Phi(s,x)=\sup_u E^y\left[\int_0^{\tau_G} f(Y(t),u_t)dt\right],$$

这里

$$f(y,u)=f(s,x,u)=e^{-\rho s}u.$$

相应的 HJB 方程是

(1) $\sup_{v\in[0,1]}\left\{e^{-\rho s}v+\frac{\partial\phi}{\partial s}+(1-v)\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right\}=0.$

如果把

(2) $\phi(s,x)=e^{-\rho s}\frac{1}{\rho}\left(1-\exp\left(-\sqrt{\frac{2}{\sigma^2}}x\right)\right),$

那么 (1) 的形式为

(3) $\sup_{v\in[0,1]}\left\{-1+\sqrt{\frac{2}{\rho\sigma^2}}\exp\left(-\sqrt{\frac{2\rho}{\sigma^2}}x\right)+v\left[1-\sqrt{\frac{2}{\rho\sigma^2}}\exp\left(-\sqrt{\frac{2\rho}{\sigma^2}}x\right)\right]\right\}=0.$

如果 $\rho\geqslant\frac{2}{\sigma^2}$, 那么对任意的 x, $1-\sqrt{\frac{2}{\rho\sigma^2}}\exp\left(-\sqrt{\frac{2\rho}{\sigma^2}}x\right)\geqslant 0$. 因此当

$$v=u^*(s,x)=1$$

时, (3) 的上确界达到. 更且相应的 (2) 的上确界为 0, 因此由定理 11.2.2 得出 $\Phi=\phi$ 且 $u_t^*=1$.

12.6. a) 无套利.

b) 无套利.

c) $\theta(t)=(0,1,1)$ 是一个套利.

d) 无套利.

e) 存在套利.

f) 无套利.

12.7. a) 完备.

b) 不完备. 比如权益:

$$F(\omega)=\int_0^T B_3(t)dB_3(t)=\frac{1}{2}B_3^2(T)-\frac{1}{2}T$$

不能被对冲.

c) 存在套利.

d) 不完备.

e) 存在套利.

f) 完备.

12.9. 对 n 维布朗运动 $B(t)=(B_1(t),\cdot,B_n(t))$, 表示公式 (12.3.23) 的形式为

$$h(B(T))=E[h(B(T))]+\int_0^T\sum_{j=1}^n\frac{\partial}{\partial z_j}E^z[h(B(T-t))]_{z=B(t)}dB_j(t).$$

(i) 如果 $h(x) = x^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, 则

$$E^z[h(B(T-t))] = E[(B^z(T-t))^2] = z^2 + n(T-t),$$

因此

$$\frac{\partial}{\partial z_j} E^z[h(B(T-t))] = 2z_j,$$

得出

$$B^2(T) = x^2 + nT + \int_0^T \sum_{j=1}^n 2B_j(t)dB_j(t), \quad B(0) = x.$$

(ii) 如果 $h(x) = \exp(x_1 + \cdots + x_n)$, 可得

$$\begin{aligned} E^x[h(B(T-t))] &= E[\exp(z_1 + B_1(T-t) + \cdots + z_n + B_n(T-t))] \\ &= \exp\left(\frac{n}{2}(T-t) + \sum_{i=1}^n z_i\right), \end{aligned}$$

因此

$$\frac{\partial}{\partial z_j} E^z[h(B(T-t))] = \exp\left(\frac{n}{2}(T-t) + \sum_{i=1}^n z_i\right).$$

如果 $B(0) = x$, 那么

$$\begin{aligned} \exp\left(\sum_{i=1}^n B_i(T)\right) &= \exp\left(\frac{n}{2}T + \sum_{i=1}^n x_i\right) \\ &\quad + \int_0^T \exp\left(\frac{n}{2}(T-t) + \sum_{i=1}^n B_i\right)(dB_1(t) + \cdots + dB_n(t)). \end{aligned}$$

12.12. c) $E_Q[\xi(T)F] = \sigma^{-1}x_1\left(1 - \frac{\alpha}{\rho}\right)(1 - e^{-\rho T})$. 复制证券组合 $\theta(t) = (\theta_0(t), \theta_1(t))$, 为

$$\theta_1(t) = \sigma^{-1}\left[1 - \frac{\alpha}{\rho}(1 - e^{\rho(t-T)})\right],$$

θ_0 由 (12.1.17) 确定.

12.15.

$$\Phi(s,x) = \begin{cases} e^{-\rho s}(K-x), & x \leqslant x^*, \\ e^{-\rho s}(K-x^*)\left(\frac{x}{x^*}\right)^\gamma, & x > x^*, \end{cases}$$

这里

$$\begin{aligned} \gamma &= \beta^{-2}\left[\frac{1}{2}\beta^2 - \alpha - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\beta^2 - \alpha\right)^2 + 2\rho\beta^2}\right] < 0, \\ x^* &= \frac{K\gamma}{\gamma - 1} \in (0, K), \end{aligned}$$

因此当首次 $X(t) \leqslant x^*$ 时, 停止是最优的.

如果 $\alpha = \rho$, 它可简化为

$$\gamma = -\frac{2\rho}{\beta^2}, \quad x^* = \frac{2\rho K}{\beta^2 + 2\rho}.$$

12.16. 回顾 (见定理 12.3.5)

$$V^\theta(T) = V^\theta(0) + \int_0^T \theta(s)dX(s)$$

当且仅当

$$\bar{V}^\theta(T) = V^\theta(0) + \int_0^T \theta(s)d\bar{X}(s) = V^\theta(0) + \int_0^T \xi(s)\hat{\theta}(s)\sigma(s)d\tilde{B}(s).$$

于是如果找一个证券组合 θ 使得

$$V^\theta(T) = F, \quad \text{a.s.}$$

要先找 ϕ, 使得

(1) $\bar{V}^\theta(T) = \xi(T)F = V^\theta(0) + \int_0^T \phi(s)d\tilde{B}(s)$, 然后记

(2) $\hat{\theta}(s) = X_0(s)\phi(s)\Lambda(s)$, 这里 $\Lambda(s)$ 是 $\sigma(s)$ 的左逆.

a) $F(\omega) = (K - X_1(T,\omega))^+$, 此时 (1) 的形式变为

$$e^{-\rho T}(K - X_1(T,\omega))^+ = E_Q[e^{-\rho T}(K - X_1(T,\omega))^+] + \int_0^T \phi(s)d\tilde{B}(s)$$

或

(3) $(K - X_1(T,\omega))^+ = E_Q[(K - X_1(T,\omega))^+] + \int_0^T \phi_0(s)d\tilde{B}(s)$, 这里

$$\phi_0(s) = e^{\rho T}\phi(s).$$

为了求 ϕ_0, 利用定理 12.3.3. 此时有

$$dY(t) = dX_1(t) = \alpha X_1(t)dt + \beta X_1(t)dB(t) = \rho X_1(t)dt + \beta X_1(t)d\tilde{B}(t),$$

其中

$$d\tilde{B}(t) = dB(t) + \frac{\alpha - \rho}{\beta}dt,$$

而且

$$h(y) = (K - y)^+,$$

且

$$E_Q^y[h(Y(T-t))] = E_Q^{x_1}[(K - X_1(T-t))^+]$$
$$= E_Q\left[\left(K - x_1 \exp\left\{\beta\tilde{B}(T-t) + \left(\rho - \frac{1}{2}\beta^2\right)(T-t)\right\}\right)^+\right],$$

由此导出

$$(4)\ \frac{d}{dx_1}E_Q^{x_1}[(K-X_1(T-t))^+] = -E_Q[\mathcal{X}_{[0,K]}(x_1\exp\{\beta\tilde{B}(T-t)$$

$$+(\rho-\frac{1}{2}\beta^2)(T-t)\})\cdot X_1^{(1)}(T-t)],$$

这里 $X_1^{(1)}(T-t)=\exp\{\beta\tilde{B}(T-t)+\left(\rho-\frac{1}{2}\beta^2\right)(T-t)\}$. 因此

$$\phi_0(t)=\frac{d}{dx_1}E_Q^{x_1}[(K-X_1(T-t))^+]_{x_1=X_1(t)}\beta X_1(t)=e^{\rho T}\phi(s),$$

代入 (2) 得到

$$(5)\ \hat{\theta}(t)=\theta_1(t)=-e^{-\rho(T-t)}E_Q[\mathcal{X}_{[0,K]}(X_1(t)\exp\{\beta\tilde{B}(T-t)$$

$$+\left(\rho-\frac{1}{2}\beta^2\right)(T-t)\})X_1^{(1)}(T-t)]$$

$$=-(2\pi(T-t))^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbf{R}}\mathcal{X}_{[0,K]}\left(X_1(t)\exp\left\{\beta y+\left(\rho-\frac{1}{2}\beta^2\right)(T-t)\right\}\right)$$

$$\cdot\exp\left\{\beta y-\frac{1}{2}\beta^2(T-t)-\frac{y^2}{2(T-t)}\right\}dy.$$

注意对任意的 $t\in[0,T]$, $\theta_1(t)<0$, 因此必须在所有时刻都要通过卖空才能复制欧式看跌期权.

参考文献

Aase K K. 1982. Stochastic continuous-time model reference adaptive systems with decreasing gain. Advances in Appl. Prop., 14: 763-788.

Aase K K. 1984. Optimum portfolio diversification in a general continuous time model. Stoch. Proc. and their Applications, 18: 81-98.

Aase K K, Øksendal B, Privault N and Ubøe J. 2000. White noise generalizations of the Clark-Haussmann-Ocone theorem, with application to mathematical finance. Finance & Stochastics, 4: 465-496.

Adler R J. 1981. The Geometry of Random Fields. Wiley & Sons Andersen, E.s., Jessen, B. (1948): Some limit theorems on set-functions. Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd. 25, #5, 1-8.

Arnold L. 1973. Stochastische Differentialgleichungen. Theorie und Anwendung. Oldenbourgh Verlag.

Barles G, Burdeau J, Romano M, Samsoen N. 1995. Critical stock price near expiration. Math. Finance, 5: 77-95.

Barndorff-Nielsen O E. 1998. Processes of normal inverse Gaussian type. Finance and Stochastics, 2: 41-68.

Bather J A. 1970. Optimal stopping problems for Brownian motion. Advances in Appl. Prob., 2: 259-286.

Bather J a. 1997. Bounds on optimal stopping times for the American put. Preprint, University of Sussex.

Beneš V E. 1974. Girsanov functionals and optimal bang-bang laws for final-value stochastic control. Stoch. Proc. and Their Appl., 2: 127-140.

Bensoussan A. 1984. On the theory of option pricing. Acta Appl. Math., 2: 139-158.

Benxoussan A. 1992. Stochastic Control of Partially Observable Systems. Cambridge Univ. Press.

Bensoussan A, Lions J L. 1978. Applications des inequations variations variationelles en control stochsatique. Dunod. (Applications of Variational Inequalities in Stochastic Control. North-Holland).

Benth F E. 2004. Option Theory with Stochastic Analysis. Springer-Verlag.

Bernard A, Campbell E A, Davie A M. 1979. Brownian motion and generalized analytic and inner functions. Ann. Inst. Fourier, 29: 207-228.

Bers L, John F, Schechter M. 1964. Partial Differential Equations. Interscience.

Biagini F and Øksendal B. 2005. A general stochastic calculus approach to insider trading. Appl. Math. Optim., 52: 167-181.

Biagini F, Hu Y, Øksendal B and Zhang T. 2007. Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications. Springer-Verlag(to appear).

Biais B, Bjork T, Cvitanic J, El Karoui N, Jouini E, Rochet J C. 1997. Financial Mathematics. Lecture Notes in Mathematics, Vol., 1656. Springer-Verlag.

Bjork T. 2004. Arbitrage Theory in Continnuous Time. Second Edition. Oxford University Press.

Bingham N H, Kiesel R. 1998. Risk-Neutral Valuation. Springer-Verlag.

Black F, Scholes M. 1973. The pricing of options and corporate liabilities. J.Political Economy, 81: 637-654.

Blumenthal R M, Getoor R K. 1968. Markov Processes and Potential Theory. Academic Press.

Borodin A N, Salminen P. 2002. Handbok of Brownian Motion-Facts and Formulae. Second Edition. Birkhauser.

Breiman L. 1968. Probability. Addsion-Wesley.

Brekke K A, Øksendal B. 1991. The high contact principle sa a sufficiency condition for optimal stopping//Lund D and Øksendal B (editors). Stochastic Models and Option Values. North-Holland, 187-208.

Brown B M, Hewitt J I. 1975. Asymptotic likelihood theory for diffusion processes. J.Appl.Prob., 12: 228-238.

Bucy R S, Joseph P D. 1968. Filtering for Stochastic Processes with Applications to Guidance. Interscience.

Chow Y S, Robbins H, Siegmund D. 1971. Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping. Houghton Miffin Co.

Chung k L. 1974. A Course in Probability Theory. Academic Press.

Chung k L. 1982. Lectures from Markov Processes to Brownian Motion. Springer-Verlag.

Chung K L, Williams R. 1990. Introduction to Stochastic Integration. Second Edition. Birkhauser.

Clark j M. 1970, 1971. The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals. Ann. Math. Stat. 41, 1282-1291 and 42, 1778, a correction.

Cont R and Tankov P. 2004. Financial Modeling with Jump Processes. Chapman and Hall 2004.

Csink L, Øksendal B. 1983. Stochastic harmonic morphisms: Functions mapping the paths of one diffusion into the paths of another. Ann. Inst. Fourier, 330: 219-240.

Csink L, Fitzsimmons P, Øksendal B. 1990. A stochastic characterization of harmonic morphisms. Math. Ann., 287: 1-18.

Cutland N J, Kopp P E, Willinger W. 1995. Stock price returns and the Joseph effect: A fractional version of the Black-Scholes model//Bolthausen, Dozzi and Russo (editors). Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications. Birkhauser, 327-351.

Davis M H A. 1977. Linear Estimation and Stochastic Control. Chapman and Hall.

Davis M H A. 1980. Functionals of diffusion processes as stochastic integrals. Math. Praoc. Cambridge Phil. Soc., 87: 157-166.

Davis M H A. 1984. Lectures on Stochastic Control and Nonlinear Filtering. Tata Institute of Fundamental Research 75. Springer-Verlag.

Davis M H A. 1993. Markov Models and Optimization. Chapman & Hall, London.

Davis M H A, Vinter R B. 1985. Stochastic Modeling and Control. Chapman and Hall.

Delbaen F, Schachermayer W. 1994. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. Math. Ann., 300: 463-520.

Delbaen F, Schachermayer W. 1995. The existence of absolutely continuous local martingale measure. Annals of Applied Probability, 5: 926-945.

Delbaen F, Schachermayer W. 1998. The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes. Math. Annalen, 312: 215-250.

Di Nunno G, Meyer-Brandis T, Øksendal B and Proske F 2006. Optimal portfolio for an insider in a market driven by Levy Processes. Quantitative Finance, 6: 83-94.

Di Nunno G, Øksendal B and Proske F. 2007. Malliavin Calculus for Levy Processes with Applications to Finance. Springer-Verlag (to appear).

Dixit A K, Pindyck R s. 1994. Investment under Uncertainty. Princeton University Press.

Doob J L. 1984. Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart. Springer-Verlag.

Duffie D. 1994. Martingales, arbitrage, and portfolio choice. First European Congress of Mathematics, vol. II, Birkhauser, 3-21.

Duffie D. 1996. Dynamic Asset Priçing Theory. Second Edition. Princeton University Press.

Durrett R. 1984. Brownian Motion and Martingales in Analysis. Wadsworth Inc.

Dynkin E B. 1963. The optimum choice of the instant for stopping a Markov process. Soviet Mathematics, 4: 627-629.

Dynkin E B. 1965 I. Markov Processes, vol. I. Springer-Verlag.

Dynkin E B. 1965 II. Markov Processes, vol. II. Springer-Verlag.

Dynkin E B, Yushkevich A A. 1979. Controlled Markov Processes. Springer-Verlag.

Eberlein E and Keller U. 1995. Hyperbolic distributions in finance. Bernoulli, 1: 281-299.

El Karoui. 1981. Les aspects probabilistes du control stochastique. Lecture Notes in Math., 876: 73-238. Springer-Verlag.

Elliott R J. 1982. Stochastic Calculus and Applications. Springer-Verlag.

Elliott R j, Kopp P E. 2005. Mathematics of Financial Markets. Second Edition. Springer-Verlag.

Elliott R J and van der Hoek J. 2003. A general fractional white noise theory and applications to finance. Math. Finance, 13: 301-330.

Elworthy K D. 1982. Stochastic Differential Equations on Manifolds. Cambridge University Press.

Emery M. 1989. Stochastic Calculus in Manifolds. Springer-Verlag.

Fakeev A G. 1970. Optimal stopping rules for processes with continuous parameter. Theory Probab. Appl., 15: 324-331.

Fleming W. 1999. Controlled Markov processes and mathematical finance//Clarke, F H and Stern R J (editors). Nonlinear Analysis, Differential Equations and Control. Kluwer, PP. 407-446.

Fleming W H, Rishel R W. 1975. Deterministic and Stochastic Optimal Control. Springer-Verlag.

Fleming W H, Soner H M. 1993. Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. Springer-Verlag.

Folland G B. 1984. Real Analysis. J.Wiley & Sons.

Freilin M. 1985. Functional Integration and Partial Differential Equations. Princeton University Press.

Friedman A. 1975. Stochastic Differential Equations and Applications, vol. Ⅰ. Academic Press.

Friedman A. 1976. Stochastic Differential Equations and Applications, vol. Ⅱ. Academic Press.

Fukushima M. 1980. Dirichlet Forms and Markov Processes. North-Holland/Kodansha.

Gard T C. 1988. Introduction to Stochastic Differential Equations. Dekker.

Gelb A Ed. 1974. Applied Optimal Estimation. MIT.

Gihman I I, Skorohod A V. 1972. Stochastic Differential Equations. Springer-Verlag.

Gihman I I, Skorohod A V. 1974. The Theory of Stochastic Processes, vol. Ⅰ. Springer-Verlag.

Gihman I I, Skorohod A V. 1975. The Theory of Stochastic Processes, vol. Ⅱ. Springer-Verlag.

Gihman I I, Skorohod A V. 1979a. The Theory of Stochastic Processes, vol. Ⅲ. Springer-Verlag.

Gihman I I, Skorohod A V. 1979. Controlled Stochastic Processes. Springer-Verlag.

Grue J. 1989. Wave drift damping of the motions of moored platforms by the method of stochastic differential equations. Manuscript, University of Oslo.

Harrison J M, Kreps D. 1979. Martingales and arbitrage in multi-period securities markets. J, Economic Theory, 20: 381-408.

Harrison J M, Pliska S. 1981. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. Stoch. Proc. and Their Applications, 11: 215-260.

Harrison J M, Pliska S. 1983. A stochastic calculus model of continuous trading: complete markets. Stoch. Proc. Appl., 15: 313-316.

Hida T. 1980. Brownian Motion. Springer-Verlag.

Hida T, Kuo H -H, Potthoff J, Streit L. 1993. White Noise. An Infinite Dimensional Approach. Kluwer.

Hoel P G, Port S C, Stone C J. 1972. Introduction to Stochastic Processes. Waveland Press, Illinois 60070.

Hoffmann K. 1962. Banach Spaces of Analytic Functions. Prentice Hall.

Holden H, Øksendal B, Ubøe J, Zhang T. 1996. Stochastic Partial Differential Equations. Birkhauser.

Hu Y. 1997. Itô-Wiener chaos expansion with exact residual and correlation,variance inequalities. Journal of Theor. Prob., 10: 835-848.

Hu Y, Øksendal B. 2003. Fractional white noise calculus and applications to finance. Infinite Dim. Analysis, Quantum Probab. & Related Topics, 6: 1-32.

Ikeda N, Watanabe S. 1989. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. Second Edition. North-Holland/Kodansha.

Itô K. 1951. Multiple Wiener integral. J. Math. Soc. Japan, 3: 157-169.

Itô K, McKean H P. 1965. Diffusion Processes and Their Sample Paths. Springer-Verlag.

Jacka S. 1991. Optimal stopping and the American put. Mathematical Finance, 1: 1-14.

Jacod J. 1979. Calcul Stochastique et Problemes de Martingales. Springer Lecture Notes in Math., 714.

Jacod J, Shiryaev A N. 2003. Limit Theorems for Stochastic Processes. second Edition. Springer-Verlag.

Jaswinski A H. 1970. Stochastic Processes and Filtering Theory. Academic Press.

Kallianpur G. 1980. Stochastic Filtering Theory. Springer-Verlag.

Kallianpur G, Karandikar R L. 2000. Introduction to Option Pricing Theory. Birkhauser.

Karatzas I. 1988. On the pricing of American options. Appl. Math. Optimization, 17: 37-60.

Karatzas I. 1997. Lectures on the Mathematics of Finance. American Mathematical Society.

Karatzas I, Lehoczky J, Shreve S E. 1987. Optimal portfolio and consumption decisions for a "Small Investor" on a finite horizon. SIAM J. Control and Optimization, 25: 1157-1186.

Karatzas I, Ocone D. 1991. A generalized Clark representation formula, with application to optimal portfolios. Stochastics and Stochastics Reports, 34: 187-220.

Karatzas I, Shreve S E. 1991. Brownian Motion and Stochastics Calculus. Second Edition. Springer-Verlag.

Karatzas I, Shreve S E. 1997. Methods of Mathematical Finance. Springer-Verlag.

Karlin S, Taylor H. 1975. A First Course in Stochastic Processes. Second Edition. Academic Press.

Kloeden P E, Platen E. 1992. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer-Verlag.

Knight F B. 1981. Essentials of Brownian Motion. American Math. Soc.

Kopp P. 1984. Martingales and Stochastic Integrals. Cambridge University Press.

Krishnan V. 1984. Nonlinear Filtering and Smoothing: An Introduction to Martingales, Stochastic Integrals and Estimation. J. Wiley & Sons.

Krylov N V. 1980. Controlled Diffusion Processes. Springer-Verlag.

Krylov N V, Zvonkin A K. 1981. On strong solutions of stochastic differential equations. Sel. Math. Sov. Ⅰ, 19-61.

Kuo H H. 1996. White Noise Distribution Theory. CRC Press.

Kushner H J. 1967. Stochastic Stability and Control. Academic Press.

Lamperti J. 1977. Stochastic Processes. Springer-Verlag.

Lamberton D, Lapeyre B. 1996. Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance. Chapman & Hall.

Levental S, Skorohod A V. 1995. A necessary and sufficient condition for absence of arbitrage with tame portfolios. Ann. Appl. Probability, 5: 906-925.

Lin S J. 1995. Stochastic analysis of fractional Brownian motions. Stochastics, 55: 121-140.

Liptser R S, Shiryaev A N. 1977. Statistics of Random Processes, vol. Ⅰ. Springer-Verlag.

Liptser R S, Shiryaev A N. 1978. Statistics of Random Processes, vol. Ⅱ. Springer-Verlag.

McDonald R, Siegel D. 1986. The value of waiting to invest. Quarterly J. of Economics, 101: 707-727.

McGarty T P. 1974. Stochastic Systems and State Estimation. J.Wiley & Sons.

McKean H P. 1965. A free boundary problem for the heat equation arising from a problem of mathematical economics. Industrial manage. review, 60: 32-39.

McKean H P. 1969. Stochastic Integrals. Academic Press.

Malliaris A G. 1983. Itô's calculus in financial decision making. SIAM Review, 25: 481-496.

Malliaris A G, Brock W A. 1982. Stochastic Methods in Economics and Finance. North-Holland.

Malliavin P. 1997. Stochastic Analysis. Springer-Verlag.

Markwitz H M. 1976. Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments. Yale University Press.

Maybeck P S. 1979. Stochastic Models, Estimation, and Control. Vols. 1-3. Academic Press.

Merton R C. 1990. Continuous-Time Finance. Blackwell Publishers.

Metivier M, Pellaumail J. 1980. Stochastic Integration. Academic Press.

Meyer P A. 1966. Probability and Potentials. Blaisdell.

Meyer P A. 1976. Un cours sur les integrales stochastiques. Sem. de Prob. X. Lecture Notes in Mathematics, vol.511. Springer-Verlag, 245-400.

Musiela M, Rutkowski M. 1997. Martingale Methods in Financial Modeling. Springer-Verlag.

Oncone D. 1984. Malliavin's calculus and stochastic integral: representation of functionals of diffusion processes. Stochastics, 12: 161-185.

Øksendal B. 1984. Finely harmonic morphisms, Brownian path preserving functions and conformal martingales. Inventions Math., 75: 179-187.

Øksendal B. 1990. When is a stochastic integral atime change of a diffusion? Journal of Theoretical Probability, 3: 207-226.

Øksendal B. 1996. An Introduction to Malliavin Calculus with Application to Economics. Preprint, Norwegian School of Economics and Business Administration.

Øksendal B. 2005. A universal optimal consumption rate for an insider. Math. Finance, 16: 119-129.

Øksendal B and Sulem A. 2007. Applied Stochastic Control of Jump Diffusions. Second Edition. Springer-Verlag.

Olsen T E, Stensland G. 1987. A note on the value of waiting to invest. Manuscript CMI, N-5036 Fantoft, Norway.

Pardoux E. 1979. Stochastic partial differential equations and filtering of diffusion processes. Stochastics, 3: 127-167.

Platen E and Rebolledo R. ????. Principles for modeling financial markets. J. Appl. Probab., 33: 601-630.

Protter P. 2004. Stochastic Integration and Differential Equation. Second Edition. Springer-Verlag.

Ramsey F P. 1928. A mathematical theory of saving. Economic J., 38: 543-549.

Rao M. 1977. Brownian Motion and Classical Potential Theory. Aarhus Univ. Lecture Notes in Mathematics 47.

Rao M M. 1984. Probability Theory with Applications. Academic Press.

Revuz D, Yor M. 1991. Continuous Martingales and Brownian Motion. Springer-Verlag.

Rogers L C G. 1997. Arbitrage with fractional Brownian motion. Math. Finance, 7: 95-105.

Rogers L C G, Williams D. 1987. Diffusions, Markov Processes, and Martingales. Vol. 2.J. Wiley & Sons.

Rozanov Yu A. 1982. Markov Random Fields. Springer-Verlag.

Samuelson P A. 1965. Rational theory of warrant pricing. Industrial managem. review, 6: 13-32.

Schoutens W. 2003. Levy Processes in Finance. Wiley.

Shiryaev A N. 1978. Optimal Stopping Rules. Springer-Verlag.

Shiryaev A N. 1999. Essentials of Stochastic Finance. World Scientific.

Shreve S E. 2004. Stochastic Calculus for Finance, Vol. Ⅰ,Vol. Ⅱ. Springer-Verlag.

Simon B. 1979. Functional Integration and Quantum Physics. Academic Press.

Snell J l. 1952. Applications of martingale system theorems. Trans. Amer. Math. Soc., 73: 293-312.

Stein J. 2006. Stochastic Optimal Control, International Finance, and Dept Crisis. Oxford University Press.

Statonovich R L. 1966. A new representation for stochastic integrals and equations. J. Siam Control, 4: 362-371.

Stroock D W. 1971. On the growth of stochastic integrals. Z. Wahr. verw. Geb., 18: 340-344.

Stroock D W. 1981. Topics in Stochastic Differential Equations. Tata Institute of Fundamental Research. Springer-Verlag.

Stroock D W. 1993. Probability Theory, An Analytic View. Cambridge University Press.

Stroock D W, Varadhan S R S. 1979. Multidimensional Diffusion Processes. Springer-Verlag.

Sussmann H J. 1978. On the gap between deterministic and stochastic ordinary differential equations. The Annals of Prob., 6: 19-41.

Taraskin A. 1974. On the asymptotic normality of vector valued stochastic integrals and estimates of drift parameters of a multidimensional diffusion process. Theory Prob. Math. Statist., 2: 209-224.

The Open University. 1981. Mathematical models and methods, unit 11. The Open University Press.

Topsøe F. 1978. An information theoretical game in connection with the maximum entropy principle (Danish). Nordisk Matematisk Tidsskrift, 25/26: 157-172.

Turelli M. 1977. Random environments and stochastic calculus. Theor. Pop. Biology, 12: 140-178.

Ubøe J. 1987. Conformal martingales and analytic functions. Math. Scand., 60: 292-309.

Van Moerbeke P. 1974. An optimal stopping problem with linear reward. Acta Mathematica, 132: 111-151.

Williams D. 1979. Diffusions, Markov Processes and Martingales. J.Wiley & Sons.

Williams D. 1981. (editor): Stochastic Integrals. Lecture Notes in Mathematics, vol. 851. Springer-Verlag.

Williams D. 1991. Probability with Martingales. Cambridge University Press.

Wong E. 1971. Stochastic Processes in Information and Dynamical Systems. McGraw-Hill.

Wong E, Zakai M. 1969. Riemann-Stieltjes approximations of stochastic integrals. Z. Wahr. verw. Geb., 12: 87-97.

Yor M. 1992. Some Aspects of Brownian Motion, Part Ⅰ. ETH Lectures in Math. Birkhauser.

Yor M. 1997. Some Aspects of Brownian Motion, Part Ⅱ. ETH Lectures in Math. Birkhauser.

常用符号及记号

$\mathbf{R}^n$	n 维 Euclid 空间
$\mathbf{R}^+$	非负实数集
$\mathbf{Q}$	有理数集
$\mathbf{Z}$	整数集
$\mathbf{Z}^+ = \mathbf{N}$	自然数集
$\mathbf{C}$	复数集
$\mathbf{R}^{n\times m}$	$n \times m$ 阶实矩阵的集合
A^T	矩阵 A 的转置
$\|C\|$	$n \times n$ 阶矩阵 C 的行列式
$\mathbf{R}^n \simeq \mathbf{R}^{n\times 1}$	即 $\mathbf{R}^n$ 中的向量看成 $n \times 1$ 阶矩阵
$\mathbf{C}^n = \mathbf{C} \times \cdots \times \mathbf{C}$	n 维复空间
$\|x\|^2 = x^2$	$\sum_{i=1}^n x_i^2$ 如果 $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$
$x \cdot y$	点积 $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ 如果 $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$
x^+	$\max(x, 0)$ 如果 $x \in \mathbf{R}$
x^-	$\max(-x, 0)$ 如果 $x \in \mathbf{R}$
$\mathrm{sign}x$	$\begin{cases} 1, & \text{如果 } x \geqslant 0 \\ -1, & \text{如果 } x < 0 \end{cases}$
$C(U, V)$	从 U 到 V 的连续函数全体
$C(U)$	即 $C(U, \mathbf{R})$
$C_0(U)$	$C(U)$ 中具有紧支集的函数全体
$C^k = C^k(U)$	$C(U)$ 中具有 k 阶连续可微函数之全体
$C_0^k = C_0^k(U)$	$C^k(U)$ 中具有紧支集的函数全体
$C^{k+\alpha}$	C^k 中 k 阶导数是指数为 α 的 Lipschitz 连续的函数之全体
$C^{1,2}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n)$	函数集$f(t, x) : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 关于 $t \in \mathbf{R}$ 是 C^1 的而关于 $x \in \mathbf{R}^n$ 是 C^2 的
$C_b(U)$	U 上的有界连续函数之全体
$f \mid K$	函数 f 在集 K 上的限制
$A = A_X$	Itô 扩散 X 的生成元
$\mathcal{A} = \mathcal{A}_X$	Itô 扩散 X 的特征算子

$L = L_X$	二阶偏微分算子在 C_0^2 中与 A_X 一致而在 C^2 中与 $\mathcal{A}_X$ 一致
$\begin{cases} B_t \\ (B_t, \mathcal{F}, \Omega, P^x) \end{cases}$	布朗运动
$\mathcal{D}_A$	算子 A 的定义域
∇	梯度: $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$
Δ	Laplace 算子: $\Delta f = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$
L	半椭圆型二阶偏微分算子 $L = \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$
R_α	预解算子
iff	当且仅当
a.a., a.e., a.s.	几乎所有, 几乎处处, 几乎必然
w.r.t.	关于
s.t	使得
$\simeq$	在律上一致 (见 8.5 节)
$\begin{cases} E[Y] \\ E^\mu[Y] \\ \int Y d\mu \end{cases}$	随机变量 Y 关于测度 μ 的期望
$E[Y\|\mathcal{N}]$	Y 关于 $\mathcal{N}$ 的条件期望
$\mathcal{F}_\infty$	由 $\cup_{t>0}\mathcal{F}_t$ 生成的 σ 代数
$\mathcal{B}$	Borel σ 代数
$\mathcal{F}_t, \mathcal{F}_t^{(m)}$	由 $\{B_s; s \leqslant t\}$ 生成的 σ 代数,B_s 是 m 维布朗运动
$\mathcal{F}_\tau$	由 $\{B_{s\wedge\tau}; s \geqslant 0\}$ 生成的 σ 代数 (τ 是停时)
$\perp$	正交 (在 Hilbert 空间)
$\mathcal{M}_t$	由 $\{X_s; s \leqslant t\}$ 生成的 σ 代数 (X_t 是 Itô扩散)
$\mathcal{M}_\tau$	由 $\{X_{s\wedge\tau}; s \geqslant 0\}$ 生成的 σ 代数 (τ 是停时)
∂G	集 G 的边界
$\bar{G}$	集 G 的闭包
$G \subset\subset H$	$\bar{G}$ 是紧的且 $\bar{G} \subset H$
$d(y, K)$	点 $y \in \mathbf{R}^n$ 到集 $K \subset \mathbf{R}^n$ 的距离
τ_G	过程 X_t 从集 G 的首次逸出时: $\tau_G = \inf\{t > 0; X_t \notin G\}$
$\mathcal{V}(S,T), \mathcal{V}^n(S,T)$	定义 3.3.1
$\mathcal{W}, \mathcal{W}^n$	定义 3.3.2
(H)	Hunt 条件 (第 9 章)
HJB	Hamilton-Jacobi-Bellman 方程 (第 11 章)

I_n	n 阶单位矩阵
$\mathcal{X}_G$	示性函数, 如果 $x \in G$, $\mathcal{X}_G(x) = 1$, 如果 $x \notin G$,$\mathcal{X}_G(x) = 0$
P^x	初值为 x 的 B_t 的概率律
$P = P^0$	初值为 0 的 B_t 的概率律
Q^x	初值为 x 的 X_t 的概率律 $(X_0 = x)$
$R^{(s,x)}$	$Y_t = (s+t, X_t^x)_{t\geqslant 0}$ 的概率律 $Y_0 = (s,x)$(第 10 章)
$Q^{(s,x)}$	$Y_t = (s+t, X_{s+t}^{s,x})_{t\geqslant 0}$ 的概率律 $Y_0 = (s,x)$(第 11 章)
$P \ll Q$	测度 P 关于测度 Q 绝对连续
$P \simeq Q$	P 与 Q 等价, 即 $P \ll Q$ 且 $Q \ll P$
$E^x, E^{(s,x)}, E^{s,x}$	分别关于测度 $Q^x, R^{(s,x)}, Q^{s,x}$ 的期望算子
E_Q	关于测度 Q 的期望
E	关于文中明显的测度的期望 (一般为 P^0)
$s \wedge t$	s 与 t 中最小的值 $(= \min(s,t))$
$s \vee t$	s 与 t 中最大的值 $(= \max(s,t))$
σ^T	矩阵 σ 的转置
δ_x	位于 x 的单位质点
δ_{ij}	如果 $i = j$,$\delta_{ij} = 1$, 如果 $i \neq j$,$\delta_{ij} = 0$
θ_t 移位算子:	$\theta_t(f(X_s)) = f(X_{t+s})$(第 7 章)
$\theta(t)$	证券组合 (见 (12.1.3))
$V^\theta(t)$	$= \theta(t) \cdot X(t)$, 值过程 (见 (12.1.4))
$V_z^\theta(t)$	$= z + \int_0^t \theta(s) dX(s)$, 初值为 z 的自筹资证券组合 θ 在 t 时刻的值
$\bar{X}(t)$	规范化的价格向量 (见 (12.1.8)~(12.1.11))
$\xi(t)$	折现因子 (见 (12.1.9))
$:=$	相当于定义
$\underline{\lim}, \overline{\lim}$	即 $\liminf, \limsup$
$\operatorname{essinf} f$	$\sup\{M \in \mathbf{R}; f \geqslant M \text{ a.s.}\}$
$\operatorname{esssup} f$	$\inf\{N \in \mathbf{R}; f \leqslant N \text{ a.s.}\}$

“递增”等同于“非减”,“递减”等同于“非增”. 在严格情形用“严格递增/严格递减”表示.

索　引

其他

《现代数学译丛》已出版书目

(按出版时间排序)

1 椭圆曲线及其在密码学中的应用——导引 2007.12 〔德〕Andreas Enge 著 吴 铤 董军武 王明强 译
2 金融数学引论——从风险管理到期权定价 2008.1 〔美〕Steven Roman 著 邓欣雨 译
3 现代非参数统计 2008.5 〔美〕Larry Wasserman 著 吴喜之 译
4 最优化问题的扰动分析 2008.6 〔法〕J. Frédéric Bonnans 〔美〕Alexander Shapiro 著 张立卫 译
5 统计学完全教程 2008.6 〔美〕Larry Wasserman 著 张 波 等译
6 应用偏微分方程 2008.7 〔英〕John Ockendon, Sam Howison, Andrew Lacey & Alexander Movchan 著 谭永基 程 晋 蔡志杰 译
7 有向图的理论、算法及其应用 2009.1 〔丹〕J. 邦詹森 〔英〕G. 古廷 著 姚兵 张忠辅 译
8 微分方程的对称与积分方法 2009.1〔加〕乔治 W. 布卢曼 斯蒂芬 C. 安科 著 闫振亚 译
9 动力系统入门教程及最新发展概述 2009.8 〔美〕Boris Hasselblatt & Anatole Katok 著 朱玉峻 郑宏文 张金莲 阎欣华 译 胡虎翼 校
10 调和分析基础教程 2009.10 〔德〕Anton Deitmar 著 丁勇 译
11 应用分支理论基础 2009.12 〔俄〕尤里・阿・库兹涅佐夫 著 金成桴 译
12 多尺度计算方法——均匀化及平均化 2010.6 Grigorios A. Pavliotis, Andrew M. Stuart 著 郑健龙 李友云 钱国平 译
13 最优可靠性设计：基础与应用 2011.3 〔美〕Way Kuo, V. Rajendra Prasad, Frank A.Tillman, Ching-Lai Hwang 著 郭进利 闫春宁 译 史定华 校
14 非线性最优化基础 2011.4 〔日〕Masao Fukushima 著 林贵华 译
15 图像处理与分析：变分，PDE，小波及随机方法 2011.6 Tony F. Chan, Jianhong (Jackie) Shen 著 陈文斌，程晋 译
16 马氏过程 2011.6 〔日〕福岛正俊 竹田雅好 著 何萍 译 应坚刚 校

17 合作博弈理论模型 2011.7 〔罗〕Rodica Branzei 〔德〕Dinko Dimitrov 〔荷〕Stef Tijs 著 刘小冬 刘九强 译

18 变分分析与广义微分 I：基础理论 2011.9 〔美〕 Boris S. Mordukhovich 著 赵亚莉 王炳武 钱伟懿 译

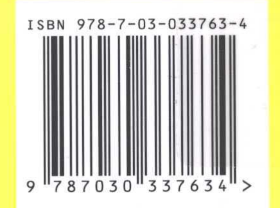
19 随机微分方程导论与应用(第 6 版) 2012.4 Bernt Øksendal 著 刘金山 吴付科 译

(O-4683.0101)

科学出版中心　数理分社
电话：(010)64033664
E-mail: math-phy@mail.sciencep.com
网址：http://www.math-phy.cn

销售分类建议：高等数学

www.sciencep.com



定 价：68.00 元